

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

27. Band, Heft 5

30. April 1943

S. 193—240

## Geschichte.

**Hofmann, Jos. E.:** Über Herrn Anderhubs Deutung der Theodoros-Stelle in Platons Theaetet. Dtsch. Math. 7, 117—120 (1942).

Der Platonforscher J. H. Anderhub hatte schon im Jahre 1918 in der Wschr. klass. Philol. 35, Sp. 598—599 eine neuartige Erklärung der bekannten Stelle in Platons Theaetet 147d gegeben, die auf die Irrationalität der Quadratwurzeln aus den ersten natürlichen Nichtquadratzahlen hinweist, deren Übersetzung und Auslegung aber umstritten ist. In einer neuen Arbeit vom Jahre 1941 (vgl. dies. Zbl. 26, 97) hat Herr Anderhub die Frage nochmals behandelt und eine überraschende und einleuchtende Deutung der Stelle gegeben an Hand der „Kettenkonstruktion“, die vom rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck mit der Kathete 1 ausgeht, aus seiner Hypotenuse und der Strecke 1 als Kathete ein neues rechtwinkliges Dreieck aufbaut und so fortfahrend eine geometrische Darstellung der Quadratwurzeln aus den natürlichen Zahlen gibt. Der Verf. der vorliegenden Note erläutert die Deutung Anderhubs, tritt ihr bei und knüpft daran einige Folgerungen für die Beurteilung der frühgriechischen Mathematik und der Leistung des Theaetet, dem der Aufbau einer strengen Theorie des Irrationalen und der zugehörigen geometrischen Konstruktionen zu danken ist.

*E. Löffler.*

● **Reidemeister, Kurt:** Mathematik und Logik bei Plato. (Hamburg. math. Einzelschriften. H. 35.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1942. 20 S. RM. 2.—.

„Der Weg, auf dem ich in folgendem den Zugang zur Dialektik suchen möchte, ist der Weg, den uns Plato selbst gewiesen hat, der Weg über die Mathematik.“ Die Mathematik, die Plato meint, kennen wir aus Euklid. Ihr Merkmal ist nicht, wie man oft gemeint hat, die Anschaulichkeit, sondern sie führt aus dem Anschaulichen heraus zu Tatsachen, die nur dem Denken zugänglich sind, wie z. B. die Irrationalität der Diagonale des Quadrats. Der Sokrates des „Staates“ ist sich der Zustimmung der Mathematiker sicher, wenn er sagt, daß die Geometer zwar von sichtbaren Gestalten reden, aber dabei etwas anderes, Unanschauliches, in casu „das Quadrat selbst und seine Diagonale“, meinen. Mathematik führt die Seele von den Sinnendingen weg und zur Erkenntnis des Seienden hin. Allerdings wird das schlechthin Seiende noch nicht durch die Mathematik, sondern erst durch die Dialektik erschlossen. Die Mathematik setzt ihre Gegenstände einfach voraus, ohne von ihrem Sein Rechenschaft abzulegen. Die Dialektik wird, wie es im Staat heißt, solche Hypothesen nur als Stufen zum Aufstieg benutzen und von ihnen aus zum Voraussetzungslosen vordringen. Wo finden wir nun die Methode dieser Dialektik? Im Dialog „Sophistes“ werden die Widersprüche entwickelt, die in dem Begriff des Nichtseienden stecken, und das Ziel der Aufweisung dieser Widersprüche ist die Aufdeckung der Unzulässigkeit gewisser logischer Verknüpfungen von Begriffen. Ebenso werden im „Parmenides“ aus dem Begriff des Einen Widersprüche entwickelt. Der Zweck der Aufweisung dieser Widersprüche wird nicht angegeben, aber es leuchtet ein, daß auch hier die Unzulässigkeit einer gewissen Schlußweise gezeigt werden soll, um den Blick auf die Wahrheit freizumachen. Wahre Aussagen über das Seiende müssen widerspruchlos sein: darauf beruht auch der indirekte Beweis in der Mathematik. Ein Kriterium für die Wahrheit einer Erkenntnis hat die Dialektik nicht, ein Kriterium für das Falsche aber ist der Widerspruch. Damit sind, gleichzeitig mit der Methode der Dialektik, auch ihre Grenzen aufgezeigt.

*van der Waerden (Leipzig).*



**Thaer, Clemens:** *Euklids Data in arabischer Fassung.* Hermes 77, 197—205 (1942).

Euklids Data wurden gegen Ende des 9. Jahrhunderts von Ishaq ben Hunain ins Arabische übersetzt, bald darauf von Tābīt revidiert und von Tūsī um 1250 neu herausgegeben. Verf. hat den Text auf Grund der Berliner Handschriften Mf 258,23 und Mq 559,6 (leider blieb ihm Mq 1867 unzugänglich) mit der nur in starker Überarbeitung Theons (~370) bekannten griechischen Ausgabe (ed. H. Menge, Leipzig 1896 auf Grund von Kodizes, deren ältester dem 10. Jahrhundert entstammt) und der Übersicht in den Collectiones des Pappus (ed. Fr. Hultsch, Berlin 1878, S. 638 bis 640) verglichen. Der Nachtrag zu Mf 258 enthält vermutlich ein Stück der ursprünglichen Fassung von Ishaq-Tābīt, der entsprechende Haupttext des Tūsī scheint daraus durch Zusammenziehen und Verbesserung hervorgegangen zu sein. Der Vergleich der einzelnen Fassungen läßt den Schluß zu, daß die Sätze 21, 36, 63, 79 und der Beweis zu Satz 73 der Mengeschen Ausgabe unecht sind. *J. E. Hofmann.*

**Hofmann, Jos. E.:** *Zum Winkelstreit der rheinischen Scholastiker in der ersten Hälfte des 11. Jahrhunderts.* Abh. preuß. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. 1942, 1—19 (Nr 8).

Von den mathematischen Kenntnissen der Frühscholastiker weiß man recht wenig. Neben der Geometrie Gerberts sind eine Reihe von Handschriften bekannt, die an die „Institutiones arithmeticae“ sowie eine Euklid-Bearbeitung des Boetius anknüpfen. Zwar werden Sätze des Euklid wiedergegeben, aber ohne Beweis, und der Sinn mathematischer Beweise fehlt. So sind die Texte jener Zeit sachlich unergiebig, aber entwicklungsgeschichtlich von Bedeutung. — Über eine solche Textgruppe handelt die Arbeit. Um 1025 haben Regimbold von Köln und Radulph von Lüttich einen in großen Teilen erhaltenen Briefwechsel über den Begriff des Innen- und Außenwinkels und den Satz von der Winkelsumme eines Dreiecks geführt. Aus ihm ist zu ersehen, daß die Winkeldefinition des Euklid und die Parallelenlehre unbekannt sind und über den Sinn der überkommenen Texte völlige Unklarheit herrscht. Verf. hat weiterhin in Cues einen kleinen anonymen Traktat aus der gleichen Zeit gefunden, in dem auf eine — wie bei den vorgehend genannten Autoren auf flächenhafter Vorstellung beruhende — Winkeldefinition und richtige Erklärung des Außenwinkels ein „Beweis“ des Winkelsummensatzes folgt, der lediglich in der Anweisung besteht, die Winkel durch Kreisbögen mit gleichem Radius zu messen, die Bögen hintereinander auf einem Kreis abzutragen und zu bestätigen, daß man auf diese Weise den Halbkreis erhält. Dieser Traktat hat, ebenso wie der Briefwechsel Regimbold—Radulph, zum mindesten indirekt als Vorlage bei der Abfassung der Quadratura circuli des Franco von Lüttich gedient, die erst durch ihn verständlich wird. — Den Beschluß bildet die Edition des Cusaner Traktats. *Harald Geppert* (Berlin).

● **Kepler, Johannes:** *Gesammelte Werke. Bd. 4. Kleinere Schriften 1602/1611.* Dioptrice. Hrsg. v. Max Caspar u. Franz Hammer. Unter der Leitung v. Walther von Dyck † u. Max Caspar. München: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandl. 1941. 525 S. RM. 15.—.

Der vorliegende Band der Keplerschen Werke enthält die kleineren Schriften aus der Grazer und Prager Zeit Keplers. Inhaltlich heben sich von diesen zehn Arbeiten besonders die drei Schriften zur Kritik und Neubegründung der Astrologie und die drei durch Galileis Nuntius sidereus veranlaßten Abhandlungen (Dissertatio cum nuntio sidereo, Narratio de observatis 4 Jovis satellitibus, Dioptrice) heraus. Besonders nachdrückliche Erwähnung verdient auch hier wieder der „Nachbericht“ der Herausgeber. Er ist auch diesmal ein unentbehrlicher Führer zum Eindringen in die Arbeiten Keplers und gibt in den Darlegungen zu den durch den Nuntius sidereus veranlaßten Schriften ein eindringliches Bild der wissenschaftlich und charakterlich verschiedenen Artung Keplers und Galileis.

*Krafft* (Marburg a. d. L.).

**Pupke, H.:** *Galileo Galilei. Zur 300. Wiederkehr seines Todestages.* Naturwiss. 30, 457—461 (1942).

Mit Zitaten, Daten und Anmerkungen reich belegte zusammenfassende Würdigung



der Tätigkeit und Bedeutung Galileis. Einleitend werden auch die zu Galileis Lebzeiten herrschenden Ansichten über die Natur und ihre Erkenntnis betrachtet. Galileis Frage heißt nicht „warum“ (teleologische Naturerklärung des Aristoteles), sondern „wie“ die Körper fallen. Die Analyse der Erfahrung, die mathematische Hypothese und ihre Prüfung durch das Experiment führen ihn zu dem beantwortenden Naturgesetz.

*József Jelítai* (Budapest).

**Anile, Antonino: La scienza di Galileo Galilei.** Riv. Fis. Mat. Sci. Nat. **16**, 401—417 (1942).

Schon in Galileis Jugendarbeit: De Motu (er war noch nicht 25 Jahre alt), findet man seine intuitive Naturauffassung im Keime. Indem er die Schwere der griechischen Tradition abschüttelt, öffnet er einen neuen Weg zur Gegenwart. Mit ihm beginnt die Epoche der Experimente, er fordert Objektivität für das Ablösen der Naturgesetze. Sein Leben, seine einheitliche Weltanschauung, seine Erfindungen und Entdeckungen (Proportionalzirkel, Thermoskop, Fernrohr, Mikroskop, Isochronismus der Pendelschwingungen, Instrument für Längenbestimmungen, Trägheit, Sonnenflecke, Zusammensetzung der Milchstraße, Jupitertrabanten, Form des Saturn, Erdbewegung) werden eingehend behandelt.

*József Jelítai* (Budapest).

**Gabba, Luigi: Galileo astronomo.** Mem. Soc. astron. Ital., N. s. **15**, 93—107 (1942).

In dem Festvortrag feiert der Redner Galileo Galilei als Astronom. Er nimmt ihn gegen die törichte Behauptung in Schutz, es sei mehr ein glücklicher Zufall gewesen, daß Galilei als erster das Fernrohr gegen den Nachthimmel richtete; ein jeder hätte die gleichen Entdeckungen machen können. Keinem Zweifel kann es unterliegen, daß Galilei ein ebenso geschickter wie kritischer Beobachter gewesen ist, der mit seinem schwerfälligen, mangelhaften Instrument — abgesehen vom Saturnsystem — sofort zu abschließenden Ergebnissen kommt. Ja, er hat sogar schon den differentiellen Anschluß an Nachbarsterne empfohlen; ein solcher Bahnbrecher verdient es doch wirklich, ein Astronom genannt zu werden. — Dem Vortrag ist als Anhang ein aufschlußreicher Brief von G. Schiaparelli aus dem Jahre 1909 beigegeben, in dem zunächst erörtert wird, welche Stützen für die Richtigkeit der heliozentrischen Auffassung es zu Lebzeiten Galileis gab. Die wichtigste stammte von Galilei selbst, der, wie aus dem Nachlaß hervorgeht, 1610/11 durch Rechnungen feststellte, daß die Bewegung der Jupitermonde nur von der Sonne aus betrachtet — nicht von der Erde aus — gleichförmig erscheint. Damit hat Galilei nach Ansicht von Schiaparelli das ptolemäische System widerlegt. Freilich stecke in seinem weiteren Schluß, damit sei das kopernikanische System bewiesen, ein Denkfehler. Von der dritten Möglichkeit, dem System Tycho de Brahes, habe Galilei offenbar gar nichts gewußt. Schiaparelli bemüht sich weiterhin, Galilei zu entschuldigen, daß er von Keplers Planetengesetzen keine Kenntnis genommen habe. Der Stil Keplers habe Galilei durchaus fernelegen, es sei für ihn wohl nicht tragbar gewesen, die großen Schriften Keplers auf Resultate hin durchzusehen, mit denen er hätte etwas anfangen können. — Die Ausführungen des Verf. und Schiaparellis lassen der Größe Galileis Gerechtigkeit widerfahren, ohne damit die Leistungen anderer Forscher zu schmälern. Nur hätte erwähnt werden können, daß die richtige Erklärung des aschfarbenen Mondlichtes, auf die Galilei großen Wert legte, schon von Michael Mästlin angegeben worden ist, wie es Kepler bezeugt hat.

*v. Schelling* (Berlin).

**Lampariello, G.: Galileo meccanico ed astronomo.** Nuovo Cimento, N. s. **19**, 45—60 (1942).

Nach einem Entwurf der aristotelisch-scholastischen Philosophie und der wissenschaftlichen Kenntnisse (Geometrie, Statik, Mechanik, Astronomie) des Altertums werden — besonders auf dem Gebiete der Mechanik und Astronomie — die Hauptleistungen der Vorläufer Galileis erwähnt. Galilei begründet eine neue Wissenschaft: die Dynamik. Er vereinigt Beobachtung und Denken, Vernunftschlüsse und Experimente mit genialer Intuition. Die Gesetze der Natur bestimmt er durch die Isolierung und Superposition der Erscheinungen. Kepler verfügte über größere algorithmische Geschicklichkeit. Die zwei voneinander nicht unabhängigen Hauptwerke Galileis (Dialogo, Discorsi) und seine astronomische Tätigkeit werden behandelt. Die Meinung Lagranges über Galileis mechanische Arbeiten, das Galilei-Prinzip der Trägheit und der Relativität und einige unentwickelte Ideen Galileis schließen den Aufsatz.

*József Jelítai* (Budapest).

● **Roloff, Ernst August: Carl Friedrich Gauss.** (Schöpfer. Niederdeutsche. Bdch. 12.) Osnabrück: Fromm 1942. 80 S. RM. 1.20.



**Loria, Gino:** Perfectionnements, évolution, métamorphoses du concept de „coordonnées“. Contribution à l'histoire de la géométrie analytique. *Mathematica, Timişvara* 18, 125—145 (1942).

Geschichtliche Studien über die Entwicklung der analytischen Geometrie seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts. In dieser Entwicklung sind von besonderer Bedeutung die Fragen nach Formeln für Koordinatentransformation und Untersuchungen über Eigenschaften von Flächen zweiten Grades. Mit erstgenannten Fragen haben sich meist französische Mathematiker, wie Carnot, Livet u. a. beschäftigt, insbesondere aber Cauchy, dessen Arbeiten auch hier in mancher Hinsicht von grundlegender Bedeutung sind. Cauchy scheint auch als erster in geometrischen Untersuchungen Determinanten angewendet zu haben. Die Geschichte der Theorie der Flächen zweiten Grades enthält zahlreiche, meist wohlbekannte Namen wie Poisson, Chasles, Bobillier, Cauchy, Cayley, Sylvester u. a. Die diesbezüglichen Arbeiten dieser Autoren werden vom Verf. aufgezählt und hinsichtlich ihres inhaltlichen und methodischen Beitrages besprochen.

*O. Borůvka (Brünn).*

**Schönwiese, Rudolf:** Alfred Berger am 10. März 1942 in Wien gestorben. *Bl. Ver-sich.-Math.* 5, 335—339 (1942).

Biographie mit Schriftenverzeichnis.

*Harald Geppert (Berlin).*

**Ferrar, W. L.: J. Hodgkinson.** *J. London Math. Soc.* 15, 236—239 (1940).

1886—1940. Biographie, wissenschaftliche Würdigung. *H. Geppert (Berlin).*

**Aitken, A. C.: Dr. E. L. Ince.** *Nature, Lond.* 148, 309—310 (1941).

**Stoilow, S.: Das mathematische Werk von Henri Lebesgue.** *Mathematica, Timişvara* 18, 13—25 (1942) [Rumänisch].

**Angheluşă, T.: Leben und mathematische Werke von E. Picard.** *Mathematica, Timişvara* 18, 1—12 (1942) [Rumänisch].

**Johansson, Ingebrigt: Sophus Lie. Betrachtungen zu seinem hundertsten Geburtstage.** *Norsk mat. Tidsskr.* 24, 97—106 (1942) [Norwegisch].

In diesem Gedenkaufsatz ist neben einer Darstellung von Lies Lebensweg eine kurze Skizze der wichtigsten Ideen gegeben, die ihm die Mathematik zu danken hat.

*Ullrich (Gießen).*

● **Hardy, G. H.: Ramanujan. Twelve lectures on subjects suggested by his life and work.** Cambridge: Univ. press 1940. 236 pag. a. New York: Macmillan Comp. 1941. \$ 6.—.

**Maier, W.: Karl Reinhardt †.** *Jber. Dtsch. Math.-Vereinig.* 52, Abt. 1, 75—83 (1942). Biographie, wissenschaftliche Würdigung, Schriftenverzeichnis.

*Harald Geppert (Berlin).*

## Algebra und Zahlentheorie.

### Lineare Algebra. Polynome:

**Ledermann, Walter:** On a problem concerning matrices with variable diagonal elements. *Proc. roy. Soc. Edinburgh* 60, 1—17 (1940).

Man ersetze in einer nichtnegativ-definiten symmetrischen Matrix  $n$ -ten Grades  $R = (r_{ik})$  die Hauptdiagonalelemente  $r_{ii}$  durch Veränderliche  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), wobei jedoch nur solche Wertsysteme zuzulassen sind, daß auch die neue Matrix  $R_x$  nichtnegativ-definit bleibt. Dann wird  $R_x$  für ein Wertsystem  $x'_i$  den kleinstmöglichen Rang und für ein Wertsystem  $x''_i$  die kleinstmögliche Spur haben. Ausgehend von der Beobachtung, daß im allgemeinen  $R_x$  für dasselbe Wertsystem  $x'_i = x''_i$  Minimalrang und Minimalspur besitzt, stellt Verf. Bedingungen für das Auftreten eines Ausnahmefalles auf. Er gibt hierfür eine notwendige und hinreichende Bedingung für den Fall, daß  $R_x$  eine Spearman-Matrix ist (Minimalrang 1), und eine hinreichende Bedingung für den allgemeinen Fall (Minimalrang  $\geq 2$ ). Begriffe und Problemstellung gehören dem Gebiet der Faktoranalyse in der statistischen Psychologie an. *Rohrbach.*

● Kowalewski, Gerhard: Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholmschen Determinanten. 3., verb. u. erw. Aufl. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1942. 320 S. geb. RM. 15.—

Die dritte Auflage dieses bekannten Lehrbuches unterscheidet sich von der zweiten durch Wiederaufnahme der Elementarteilertheorie. Diese, die in der ersten Auflage als Äquivalenztheorie von Büscheln linearer Formen behandelt worden war, wird jetzt nach dem Verfahren des Verf. dargestellt, das er in seiner Arbeit: Natürliche Normalformen linearer Transformationen [Leipziger Ber. 69, 325—335 (1917)] veröffentlicht hat. Wie in der zweiten Auflage fehlen auch jetzt die Kapitel der ersten Auflage über unendliche Determinanten und über die Hilbertschen Eigenfunktionen eines reellen symmetrischen Kerns, und die Fredholmsche Theorie wird nur in der gekürzten Form der zweiten Auflage gebracht. Doch werden diese Streichungen durch das inzwischen erschienene Buch des Verf. über Integralgleichungen (Berlin 1930) zum Teil ausgeglichen.

Rohrbach (Prag).

Claeys, A.: Sur quelques déterminants trigonométriques. Mathesis 54, 298—301 (1942).

Verf. prüft einige in den Éléments de la théorie des déterminants (4. Auflage, Paris 1883) von P. Mansion angegebene Determinantengleichungen mit trigonometrischen Gliedern nach und stellt einige davon richtig. Anlaß dazu gab die Identität

$$\begin{vmatrix} 1 \tan \alpha \cos \alpha \\ 1 \tan \beta \cos \beta \\ 1 \tan \gamma \cos \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

welche die Kollinearitätsbedingung dreier Punkte der Kampyla des Eudoxus mit den Parametergleichungen  $x = \frac{b^2}{a \cos \omega}$ ,  $y = \frac{b^2 \tan \omega}{a \cos \omega}$  darstellt. K. Fladt.

Ore, Aadne: Über doppelt-symmetrische Determinanten und zugehörige lineare Gleichungssysteme. Norsk mat. Tidsskr. 24, 65—73 (1942) [Norwegisch].

Eine doppelt-symmetrische Determinante (symmetrisch i. b. a. die Hauptdiagonale und Nebendiagonale) vom Grade  $2n$  schreibt Verf. in der Gestalt

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_2 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n & \dots & b_{2n-2} & a_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_{n-1} & \dots & n_1 & n_2 & \dots & b_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & b_n & \dots & n_2 & n_1 & \dots & b_{n-1} & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & b_{2n-2} & \dots & b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 & a_2 \\ a_{2n} & a_{2n-1} & \dots & a_{n+1} & a_n & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Addiert man die letzte Zeile zur ersten, die vorletzte Zeile zur zweiten usw., subtrahiert man in der neuen Determinante die erste Spalte von der letzten, die zweite Spalte von der vorletzten usw., so sieht man, daß sich  $D_{2n}$  als Produkt zweier  $n$ -reihiger symmetrischer Determinanten  $D_{2n} = D_n D'_n$  schreiben läßt mit

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 + a_{2n} & a_2 + a_{2n-1} & \dots & a_n + a_{n+1} \\ a_2 + a_{2n-1} & b_1 + b_{2n-2} & \dots & b_{n-1} + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n + a_{n+1} & b_{n-1} + b_n & \dots & n_1 + n_2 \end{vmatrix},$$

$$D'_n = \begin{vmatrix} a_1 - a_{2n} & a_2 - a_{2n-1} & \dots & a_n - a_{n+1} \\ a_2 - a_{2n-1} & b_1 - b_{2n-2} & \dots & b_{n-1} - b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - a_{n+1} & b_{n-1} - b_n & \dots & n_1 - n_2 \end{vmatrix}.$$



Entsprechend läßt sich eine  $(2n + 1)$ -reihige doppelsymmetrische Determinante als Produkt einer  $(n + 1)$ -reihigen und einer  $n$ -reihigen Determinante schreiben. Sind die Elemente von  $D_{2n}$  lineare Funktionen eines Parameters  $\lambda$ , so spaltet sich die Säkulargleichung  $D_{2n} = 0$  in die beiden Gleichungen  $D_n = 0$  und  $D'_n = 0$ . Die Eigenwerte und die zugehörigen Matrizen teilen sich also in zwei Gruppen. Verf. untersucht die Bedeutung dieser Unterscheidung für die Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems mit doppelsymmetrischer Determinante. *H. L. Schmid* (Berlin).

**Perron, Oskar: Beweis und Verschärfung eines Satzes von Kronecker.** *Math. Ann.* 118, 441—448 (1942).

Der Satz von Kronecker heißt: Ein System von beliebig vielen Gleichungen mit  $k - 1$  Unbekannten ist stets einem System von höchstens  $k$  Gleichungen äquivalent. Hier wird folgende Verschärfung bewiesen: Zu  $n$  homogenen Polynomen  $f_v$  gleichen Grades in  $k$  Variablen kann man stets  $k$  Linearkombinationen  $\varphi_k$  so angeben, daß das Gleichungssystem  $f_v = 0$  äquivalent dem System  $\varphi_k = 0$  ist. Äquivalenz bedeutet dabei nur, daß beide Gleichungssysteme dieselben Lösungen haben, nicht etwa, daß das Ideal  $(f_1, \dots, f_n)$  gleich dem Ideal  $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$  ist. Beim Beweis wird benutzt, daß zwischen je  $k + 1$  Formen  $f_v$  eine homogene algebraische Abhängigkeit besteht. Dieser Satz läßt sich folgendermaßen verschärfen: Zwischen je  $k + 1$  Formen  $m$ -ten Grades in  $k$  Variablen besteht eine homogene Abhängigkeit  $F(f_1, \dots, f_{k+1}) = 0$  vom Grade  $m^{k-1}$ . *van der Waerden* (Leipzig).

**Neuhaus, F. W.: Affektlosigkeit der Gleichungen für fast alle Werte des linearen Koeffizienten.** *Dtsch. Math.* 7, 87—116 (1942).

Es werden Gleichungen der Form

$$f_v(x, t) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + t x^{n-v} + a_{v+1} x^{n-v-1} + \dots + a_n = 0$$

betrachtet, wo  $t$  eine Unbestimmte ist und die  $a_i$  ganze Zahlen sind. Es wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen man behaupten kann, daß die Gleichung nur für endlich viele ganzzahlige Werte  $t^*$  von  $t$  einen Affekt besitzt. Im Fall  $n - v = 1$  braucht man nur vorauszusetzen, daß die Gleichung für unbestimmte  $t$  über  $P(t)$  affektfrei ist. Im Fall  $n = v$  gibt es unendlich viele ganze  $t^*$ , für die die Gleichung eine ganze rationale Wurzel besitzt; sondert man diese aber aus und nimmt an, daß der Grad  $n$  entweder eine Primzahl  $> 3$  oder eine zusammengesetzte Zahl  $> 9$  ist und daß die Gleichung über  $P(t)$  keinen Affekt hat, so gibt es nur endlich viele Werte  $t^*$ , die einen Affekt bewirken. Die Beweismethoden sind dieselben wie in zwei früheren Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 15, 1). Folgendes gruppentheoretische Ergebnis sei noch hervorgehoben: Für  $n > 9$  gibt es in der symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_n$  außer der alternierenden keine transitive Untergruppe von einem Index  $j \leq (n - 1)(n - 2)$ . *van der Waerden* (Leipzig).

**Toepken, Heinrich: Ein Satz über Kongruenzen.** *Dtsch. Math.* 7, 86 (1942).

In einer früheren Arbeit des Verf. [*Deutsche Math.* 2, 631—633 (1937)] wurde im Nachtrag der folgende, in jedem Polynombereich  $I[x]$  über einem Integritätsbereich  $I$  von der Charakteristik Null gültige Hilfssatz bewiesen: Es seien  $a(x)$  und  $b(x)$  Polynome von gleichem Grade  $n \geq 1$  und dem höchsten Koeffizienten 1. Es seien  $p$  eine Primzahl,  $A(x)$  und  $B(x)$  diejenigen (von selbst in  $I[x]$  gelegenen) Polynome  $n$ -ten Grades mit dem höchsten Koeffizienten 1, deren Wurzeln die  $p$ -ten Potenzen der Wurzeln von  $a(x)$  bzw.  $b(x)$  sind. Ist dann  $v \geq 1$  ganz,  $a(x) \equiv b(x) \pmod{p^v}$ , so ist  $A(x) \equiv B(x) \pmod{p^{v+1}}$ . Dieser Satz wurde damals auf die Tatsache zurückgeführt, daß allgemein  $F(x) = \prod_{\varepsilon} f\left(\varepsilon x^{\frac{1}{p}}\right)$  ist, wenn

$$F(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n$$

die  $p$ -ten Potenzen der Wurzeln von  $f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n$  zu Wurzeln hat und  $\varepsilon$  die  $p$ -ten Einheitswurzeln durchläuft. In der vorliegenden Note gibt Verf. einen



einfacheren Beweis, der ohne Benutzung der Einheitswurzeln auskommt. Der Beweis beruht darauf, daß allgemein  $c_i^p = (-1)^{i(p-1)} C_i + p g_i(c_1, \dots, c_n)$  ist, wo  $g_i$  ein Polynom mit ganz-rationalen Koeffizienten bedeutet. Weber (Berlin).

**Lipka, Stephan:** Die Descartessche Zeichenregel und interszendenten Polynome. Dtsch. Math. 7, 83—85 (1942).

Th. Vahlen (vgl. dies. Zbl. 20, 199) hat gezeigt, daß die Zeichenregel von Descartes auch für interszendente Polynome gilt. Dieses Ergebnis wurde vom Verf. auf folgende Weise erweitert: Es sei

$$f(x) = a_0 e^{\alpha_0 \log x} + a_1 e^{\alpha_1 \log x} + \dots + a_n e^{\alpha_n \log x},$$

wo  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  beliebige reelle Zahlen sind, die der Ungleichung  $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < 1$  genügen, und wo  $\log x$  den Hauptwert von  $\log x$  bedeutet, d. h.  $\log x = |\log x| + i \arg x$ ,  $-\pi < \arg x \leq \pi$ . Bezeichnen  $v$  die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge  $a_0, a_1, \dots, a_n$  und  $p, q$  und  $r$  die Anzahl der positiven, negativen bzw. komplexen Nullstellen von  $f(x)$ , so gilt die Ungleichung  $p + r + 2q \leq v$ . Erweitert man den Wertvorrat von  $f(x)$  dadurch, daß  $\log x$  außer dem Hauptwert die übrigen Nebenwerte annehmen kann, und verschwindet  $f(x)$  für keinen Nebenwert von  $\log x$ , so gilt die Gleichung

$$p + r + 2q = n.$$

Gy. v. Sz. Nagy (Kolozsvár, Ungarn).

### Ringe. Körper:

**Groot, J. de, und F. Loonstra:** Topologische Eigenschaften bewerteter Körper. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 45, 658—664 (1942).

Das Hauptergebnis der Arbeit wird von den Verff. selbst so zusammengefaßt:

1. Alle nichtarchimedisch bewerteten Körper sind nulldimensionale lineare Räume.
2. Ein nichttrivial nichtarchimedisch bewerteter Körper enthält dann und nur dann im topologischen Sinne eine abzählbare Umgebungsbasis, wenn bei der sukzessiven Erzeugung des Körpers aus seinem Primkörper die Anzahl der adjungierten „vollkommen transzendenten“ Elemente höchstens abzählbar ist.
3. Alle nichttrivial nichtarchimedisch bewerteten Körper  $K$ , welche eine höchstens abzählbare Umgebungsbasis besitzen, sind bis auf eine höchstens abzählbar unendliche Punktmenge zum Cantorschen Diskontinuum homöomorph; insbesondere sind es die im kleinen kompakten, nichtarchimedisch bewerteten Körper bis auf einen Punkt. — Dabei nennen Verff. das Element  $a$  aus dem bewerteten Körper  $K$  „vollkommen transzendent“ über dem Unterkörper  $L$ , wenn  $a$  im üblichen Sinne über  $L$  transzendent und außerdem nicht als Grenzwert einer konvergenten Folge von Elementen aus  $L$  darstellbar ist. — Der Beweisgang ist im wesentlichen elementar und in seinem Aufbau ohne weiteres zu übersehen. Doch sei auf zwei Lücken hingewiesen, die der Exaktheit halber kurz ausgefüllt werden sollten: a) S. 660/661 wird behauptet: Besitzt der nichtarchimedisch bewertete Körper  $K$  eine abzählbare Umgebungsbasis, so gilt das gleiche für jeden algebraischen Oberkörper von  $K$ . Bewiesen aber wird diese Behauptung nur für den kleinsten algebraisch abgeschlossenen Oberkörper  $K'$ . — b) Es sei z. B.  $K$  der mit Hilfe irgendeiner Primzahl  $p$  bewertete Körper der rationalen Zahlen,  $L$  der als Oberkörper von  $K$  gleichfalls bewertete Körper aller algebraischen Zahlen,  $L^*$  sei die vollständige Hülle von  $L$ . Dann besitzt  $L^*$  sicher eine abzählbare Umgebungsbasis; andererseits enthält  $L^*$  nichtabzählbar viele über  $K$  vollkommen transzendente Elemente (die zwar als Grenzwerte von Folgen algebraischer, nicht aber als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen darstellbar sind); es erscheint daher jedenfalls nicht als von vornherein ausgeschlossen, daß ein Zwischenkörper  $M$  zwischen  $K$  und  $L^*$  existiert, der aus  $K$  durch Adjunktion nichtabzählbar vieler, vollkommen transzendenter Elemente entsteht. Gibt es aber tatsächlich einen solchen Zwischenkörper, so ist die oben ausführlich wiedergegebene Behauptung 2 zum mindesten in der von den Verff. gewählten Formulierung nicht einwandfrei. — Die ganzen Schwierigkeiten wären offen-



bar beseitigt, wenn man sich auf den Satz berufen könnte: Besitzen der Körper  $K$  und sein Oberkörper  $L$  jeweils eine abzählbare Umgebungsbasis, so gilt das gleiche für jeden Zwischenkörper  $M$  zwischen  $K$  und  $L$ . Aber auf diesen, zum mindesten keineswegs selbstverständlichen, Satz wird in der vorliegenden Arbeit jedenfalls nirgends Bezug genommen.

Krull (Bonn).

**Loonstra, F.:** Im Kleinen kompakte nichtarchimedisch bewertete Körper. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 45, 665—668 (1942).

Es wird ein direkter, elementarer Beweis für den folgenden Satz gegeben: Ein im Sinne von Ostrowski nichtarchimedisch bewerteter Körper ist dann und nur dann im Kleinen kompakt, wenn er entweder eine endliche algebraische Erweiterung eines rationalen  $p$ -adischen Körpers im Sinne von Hensel, oder die vollständige (perfekte) Hülle einer einfachen, transzendenten Erweiterung eines absolut algebraischen Körpers von Primzahlcharakteristik darstellt. Wie Verf. selbst bemerkt, ist dieses Ergebnis in früher von van Dantzig aufgestellten allgemeinen Sätzen (Studien over Topologische Algebra, Amsterdam 1931, S. 22; dies. Zbl. 6, 102) enthalten. Auch mit älteren Untersuchungen von Schöbe (Beiträge zur Funktionentheorie in nicht-archimedisch bewerteten Körpern, Münster 1930) besteht ein enger Zusammenhang.

Krull (Bonn).

**Krull, Wolfgang:** Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. Eine Bemerkung zu den Beiträgen 6 und 7. Math. Z. 48, 530—531 (1942).

Ergänzung zu einem Primär idealsatz aus Beitrag VI (s. dies. Zbl. 20, 340).

Lorenzen (Wesermünde-Lehe).

### Zahlkörper:

**Rédei, L.:** Zur Frage des Euklidischen Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern. Math. Ann. 118, 588—608 (1942).

Es war bisher bekannt, daß der Euklidische Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern  $K = R(\sqrt{m})$  mit  $m = -11, -7, -3, -2, -1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57$  existiert, daß er nur für endlich viele weitere  $m$  existieren kann, und zwar nur dann, wenn  $m = 61, 109$  oder eine Primzahl  $p \equiv 1 \pmod{8}$  ist, aber von den letzteren bis zur Schranke  $m \leq 3001$  nur für 73, 89, 97, 113, 137, 193, 241, 313, 337, 457, 601. Verf. zeigt nun, daß  $p \equiv 17 \pmod{24}$  und  $p = 61, 109$  ohne E. A. sind, ferner daß der E. A. in  $K = R(\sqrt{73})$  gilt und gibt an, daß dies auch im Körper  $K = R(\sqrt{97})$  der Fall ist. Die angewandten Methoden scheinen weitere Ergebnisse über den E. A. leisten zu können.

Bergström (Uppsala).

**Gut, Max:** Zur Theorie der Klassenkörper der Kreiskörper, insbesondere der Strahlklassenkörper der quadratisch imaginären Zahlkörper. Comment. math. helv. 15, 81—119 (1942).

Verf. stellt sich als Aufgabe, den maximalen absolut-abelschen Körper zu bestimmen, der im Klassenkörper eines absolut-abelschen Körpers enthalten ist. Weil ein absolut-abelscher Körper stets in einem Körper  $c(m)$  der  $m$ -ten Einheitswurzeln bei passendem  $m$  enthalten ist, nennt Verf. ihn kurz Kreiskörper. Ist  $k$  ein beliebiger Kreiskörper,  $\mathfrak{f}$  ein Ideal von  $k$ , so bezeichne  $K(\mathfrak{f})$  den zu  $k$  gehörigen Strahlklassenkörper mit dem Führer  $\mathfrak{f}$  und  $k(\mathfrak{f})$  den maximalen Unterkörper von  $K(\mathfrak{f})$ , der absolut-abelsch ist. Wenn  $m = 2^{h_0} l_1^{h_1} \dots l_n^{h_n}$  die Primzahlpotenzzerlegung von  $m$  ist, so ist ein Unterkörper von  $c(m)$  entweder ein direktes Kompositum von Unterkörpern der Körper  $c(2^{h_0}), c(l_1^{h_1}), \dots, c(l_n^{h_n})$  und heißt dann Ausgangskreiskörper, oder er hat nicht diese Eigenschaft und heißt dann verschränkter Kreiskörper. Der kleinste,  $k$  enthaltende Ausgangskreiskörper wird als die Hülle von  $k$  bezeichnet. Verf. zeigt, daß  $k(1)$  die Hülle von  $k$  ist, wenn  $k$  ein beliebiger Kreiskörper ist, und bestimmt  $k(1)$ , wenn  $k$  ein quadratischer Zahlkörper, das Kompositum absolut-quadratischer Zahlkörper, ein absolut-zyklischer Körper von ungeradem Primzahlgrad oder das Kompositum von solchen ist, die alle denselben Grad haben. Er bestimmt ferner  $k(\mathfrak{f})$  allgemeiner für



imaginär-quadratische Zahlkörper und gibt einen Überblick über den Aufbau von  $K(\mathfrak{f})$  aus  $K(1)$ . Bergström (Uppsala).

### Zahlentheorie:

**Olds, C. D.:** On the representations,  $N_3(n^2)$ . Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 499—503 (1941).

$p$  bedeutet stets ungerade Primzahlen.  $N_r(n)$  ist die Anzahl der Lösungen der Gleichung  $n = x_1^2 + \dots + x_r^2$  in ganzen  $x_j \geq 0$ . Folgende Formel wurde von Hurwitz (Mathem. Werke II, Basel 1933, S. 751; dies. Zbl. **7**, 195) ohne Beweis angegeben, von Pall [J. London Math. Soc. **5**, 102—105 (1930), wo auch die Fälle  $r = 5, 7, 11$  betrachtet werden] analytisch bewiesen: Für  $m = 2^k \prod p^\alpha$  ist

$$(1) \quad N_3(m^2) = 6 \prod_{p \equiv 1 \pmod{4}} p^\alpha \cdot \prod_{p \equiv 3 \pmod{4}} \left( p^\alpha + 2 \frac{p^\alpha - 1}{p - 1} \right).$$

Verf. gibt einen elementaren Beweis von (1), der durch die Hurwitzsche Behandlung von  $N_5(m^2)$  [vgl. C. R. Acad. Sci., Paris **98**, 505—507 (1884)] angeregt wurde. — Beweisskizze. I. Ist  $f(n)$  für natürliche  $n$  definiert,  $f(1) \neq 0$ ,  $f(nn') = f(n)f(n')$ ,

$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ , so ist  $F(nn') = \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d) f(d) F(n/d) F(n'/d)$  (man setze  $F(x) = 0$ ,

wenn  $x$  keine natürliche Zahl ist, und analog bei anderen zahlentheoretischen Funktionen). — II. Es sei  $\varrho_k(n) = \sum_{d|n} (-1)^{\frac{1}{2}(\delta-1)d^k} d^k$ ,  $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ ; dann ist  $\sum_{a+b=2m, 2 \nmid a} \varrho_0(a) \varrho_0(b) = \sigma_1(m)$

für ungerades  $m > 0$ . — Beweis von (1). Es genügt, den Fall  $k = 0$  zu betrachten. Ist dann  $R$  die Anzahl der Lösungen von  $m^2 = x^2 + y^2 + z^2$  mit geradem  $x$ , so ist  $N_3(m^2) = \frac{3}{2} R = \frac{3}{2} \sum_{2|\nu| < m} N_2(m^2 - 4\nu^2) = 6 \sum_{2|\nu| < m} \varrho_0((m-2\nu)(m+2\nu)) = 6 \sum_{a+b=2m, 2 \nmid a} \varrho_0(ab)$ .

Setzt man in I  $f(n) = 0$  für gerades  $n$ ,  $f(n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$  für ungerades  $n$ , so ist  $F(n) = \varrho_0(n)$

und aus I, II bekommt man  $N_3(m^2) = 6 \sum_{\substack{d=1 \\ 2 \nmid d}}^{\infty} \mu(d) (-1)^{\frac{d-1}{2}} \sum_{a+b=2m, 2 \nmid a} \varrho_0\left(\frac{a}{d}\right) \varrho_0\left(\frac{b}{d}\right)$

$$= 6 \sum_{d|m} \mu(d) (-1)^{\frac{d-1}{2}} \sigma_1\left(\frac{m}{d}\right) = 6 \prod_{p|m} \left( \sigma_1(p^\alpha) - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \sigma_1(p^{\alpha-1}) \right), \quad \text{woraus (1)}$$

folgt. — Ein anderer arithmetischer Beweis von (1) bei Pall [Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 487—500 (1940); dies. Zbl. **23**, 199]. Jarník (Prag).

**Olds, C. D.:** On the representations,  $N_7(m^2)$ . Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 624—628 (1941).

Bezeichnungen und Literaturnachweise wie im vorstehenden Referat; auch die Beweismethode ist analog. Für  $m = \prod p^\alpha$  wird hier die Formel

$$N_7(m^2) = 14 \prod_{p|m} (\sigma_5(p^\alpha) - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^2 \sigma_5(p^{\alpha-1}))$$

bewiesen. Im Beweis werden bekannte Formeln über die Anzahl der Darstellungen durch 6 und 12 Quadrate herangezogen. Jarník (Prag).

**Selmer, Ernst S.:** Eine einfache Summationsmethode in der Primzahltheorie und ihre Anwendung auf die „Summe von Brun“. Norsk mat. Tidsskr. **24**, 74—81 (1942) [Norwegisch].

Mit empirischen Erwägungen auf Grund des Primzahlsatzes wird für alle im Bereich  $z \geq 0$  stetigen und positiven Funktionen  $F(z)$  die folgende, unter schärferen Voraussetzungen bereits bekannte asymptotische Formel plausibel gemacht:

$$\sum_{p \leq x} F(p) \sim \sum_{1 < z \leq x} \frac{F(z)}{\log z} \sim \int_1^x \frac{F(z)}{\log z} dz, \quad \text{wo in den Summen } p \text{ Primzahlen, } z \text{ ganze Zahlen}$$



durchläuft. Im Falle  $F(z) = z$  kommt die Formel auf den Satz hinaus, daß die Summe der Primzahlen bis  $x$  asymptotisch gleich der Anzahl der Primzahlen bis  $x^2$  ist. Zur Probe wird die Zunahme des einen wie des andern Ausdrucks von  $x^2 = 10^8$  bis  $x^2 = 10^9$  numerisch ermittelt; die Abweichung beträgt etwa 1%. — Ähnliche Betrachtungen wie oben erhärten die „Wahrscheinlichkeit“ des folgenden

Satzes: Unter gehörigen Voraussetzungen über  $F$  ist  $\sum_{p \leq x} F(p, p+2) \sim k \int_0^x \frac{F(z-1, z+1)}{\log^2 z} dz$

mit  $k = 2 \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)$ , wo  $p$  in diesem Produkt beliebige Primzahlen, in der

Summe hingegen nur solche Primzahlen  $> 3$  durchläuft, für die  $p+2$  ebenfalls Primzahl ist.  $F(u, v) = 1$  ergäbe hiernach die Anzahl der Paare von Primzahlzwillingen bis  $x$

asymptotisch zu  $k \int_0^x \frac{dz}{\log^2 z}$ , so daß es insbesondere unendlich viele Paare von Primzahl-

zwillingen gäbe.  $F(u, v) = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$  ergäbe mit denselben  $p$  wie in der vorigen Summe

$\sum_{p \leq x} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right) \sim B - \frac{2k}{\log x}$  mit angebbarem, konstantem  $B$ , das zugleich den Wert

der Brunschen Reihe der reziproken Primzahlzwillinge unter Weglassung des Paares 3, 5 darstellen würde und mit  $10/100$  Genauigkeit zu 1,368 errechnet wird. Die Güte der Annäherung wird beide Male für einzelne  $x$  numerisch geprüft.

Weber.

**Selberg, Atle:** On the zeros of Riemann's Zeta-function on the critical line. Arch. Math. og Naturvid. B 45, Nr 9, 1—14 (1942).

Für  $T > 0$  sei  $N_0(T)$  die Anzahl der Nullstellen der Funktion  $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ , die im Intervall  $0 < t < T$  liegen. Verf. beweist: Es gibt zwei positive Zahlen  $K, T_0$  mit folgender Eigenschaft: für  $T > T_0$  ist  $N_0(2T) - N_0(T) > KT \log \log \log T$ ; eine analoge Ungleichung mit der schwächeren rechten Seite  $KT$  war bereits bekannt [vgl. Hardy und Littlewood, Math. Z. 10, 283—317 (1921), oder die Darstellung bei Titchmarsh, The Zeta-Function of Riemann, Cambridge Tracts No. 26 (1930)]. Der Fortschritt wird durch folgenden Kunstgriff erreicht: Statt der üblichen Funktion

$Z(t) = -\frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{2}(s-\frac{1}{2})} \Gamma(\frac{1}{2}s) \zeta(s)$  ( $s = \frac{1}{2} + it$ ) betrachtet Verf. die Funktion

$Z(t) |\eta(\frac{1}{2} + it)|^2$ , wo  $\eta(s) = \prod_{p \leq \xi} (1 - \frac{1}{2} p^{-s} - \frac{1}{3} p^{-2s})$ ,  $\xi = \sqrt{\log \log T}$ ; für  $s = \frac{1}{2} + it$

ist  $\eta^2(s) = \prod_{p \leq \xi} (1 - p^{-s} + O(p^{-\frac{1}{2}}))$ ; es ist daher begreiflich, daß der Faktor  $|\eta(s)|^2$  die

Variation von  $|\zeta(s)|$  bis zu einem gewissen Grade neutralisiert. Am Schluß der Arbeit [vgl. S. 14, insbesondere Fußnote<sup>2</sup>] kündigt Verf. ohne Beweis folgenden wesentlich schärferen Satz an: Zu jedem  $a > \frac{1}{2}$  gibt es zwei positive Zahlen  $K(a), T_0(a)$  mit folgender Eigenschaft: für  $T > T_0(a)$  ist  $N_0(T + T^a) - N_0(T) > K(a) T^a \log T$  [man bemerke, daß andererseits bekanntlich  $N_0(T + T^a) - N_0(T) = O(T^a \log T)$  ist]. — Wichtigere Druckfehler: Auf S. 2, Formel (2) ersetze man das erste  $\sum$  durch  $\prod$ . In der Formel (10) auf S. 3 lies  $z^{1/2}$  statt  $z^{-1/2}$ .

Jarník (Prag).

**Ballieu, Robert:** Sur le développement des irrationnelles quadratiques en fractions continues régulières. Mathesis 54, 304—314 (1942).

Es seien  $a_0 > 0$ ,  $b_0, c_0$  ganze rationale Zahlen,  $b_0^2 - 4a_0c_0$  positiv und kein Quadrat,  $x_0$  eine Wurzel von  $f_0(x) = a_0x^2 + b_0x + c_0$ . Die Folge  $x_0, x_1, x_2, \dots$  sei rekursiv durch  $x_i = n_i + \frac{1}{x_{i+1}}$  ( $n_i$  ganz,  $x_{i+1} > 1$ ) erklärt. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Folge von Polynomen  $f_i(x) = a_ix^2 + b_ix + c_i$  mit ganzen Koeffizienten und den Eigenschaften  $f_i(x_i) = 0$ ,  $a_i > 0$ ,  $c_{i+1} = \pm a_i$ . Gezeigt wird zunächst, wie man mittels gehöriger Formalisierung des Übergangs von  $f_i(x)$  zu den Polynomen  $f_{i+1}(x)$  und  $F_i(x) = -c_ix^2 + b_ix - a_i$  die bekannten Sätze über die Folge  $n_i$



rasch an Hand der  $f_i(x)$  ableiten kann, ohne die Konvergenz des regelmäßigen Kettenbruchs für  $x_0$ , dessen Teilnenner die  $n_i$  sind, zu benutzen. Auf jene Weise wird zunächst die Periodizität der Folge  $f_i(x)$  und somit auch der Folge  $n_i$  bewiesen. Mit denselben Mitteln ergibt sich der Satz, daß die Folge  $n_i$  dann und nur dann reinperiodisch ist, wenn  $x_0 > 1$ .  $-1 < \overline{x_0} < 0$  ist. Sind nämlich diese Bedingungen erfüllt, so ist  $n_{i-1}$  der ganzzahlige Teil der positiven Wurzel von  $F_i(x)$  und damit durch  $f_i(x)$  eindeutig bestimmt, woraus weiter folgt, daß auch  $f_{i-1}(x)$  durch  $f_i(x)$  eindeutig bestimmt ist. Auf gleiche Weise ergibt sich endlich der von Galois herrührende Satz, daß im reinperiodischen Falle die Perioden der Folge  $n_i$  und der entsprechenden, zu  $X_0 = -\frac{1}{x_0}$  gehörigen Folge zueinander reziprok sind. Ist nämlich  $h \geq 1$  mit  $f_h(x) = f_0(x)$  möglichst klein gewählt, so bilden  $F_h(x)$ ,  $F_{h-1}(x)$ ,  $\dots$ ,  $F_1(x)$  die Periode der zu  $X_0$  im obigen Sinne gehörigen Polynomfolge; die ganzzahligen Teile der positiven Wurzeln dieser Polynome lauten aber nach dem Obigen gerade  $n_{h-1}$ ,  $n_{h-2}$ ,  $\dots$ ,  $n_0$ . Über diese bekannten Sätze hinaus wird schließlich der Fall symmetrischer Perioden untersucht. Die durch Nullsetzen der zugehörigen Polynome entstehenden Gleichungen sind Sonderfälle einer von Serret (Cours d'algèbre supérieure, 6. Aufl., Paris 1910, S. 57—59) behandelten Klasse von Gleichungen; durch unimodulare Transformation gehen aus ihnen alle Gleichungen dieser Klasse hervor. Die bekannten Sondereigenschaften der Kettenbruchentwicklung einer Quadratwurzel (vgl. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, 2. Aufl., Leipzig 1929, S. 87—91) ordnen sich ohne weiteres ein. W. Weber (Berlin).

**Rédei, L.:** Zu einem Approximationssatz von Koksma. Math. Z. 48, 500—502 (1942).

Gemäß dem in der Überschrift genannten Satz ist die Folge  $\alpha^x (x=1, 2, \dots)$  für fast alle  $x > 1$  gleichverteilt mod 1. Für spezielle  $\alpha$  jedoch ist in dieser Hinsicht nur in den seltensten Fällen Näheres bekannt. Aus den Newtonschen Formeln folgt sofort, daß für jedes algebraische  $\alpha$ , dessen Konjugierte sämtlich absolut  $< 1$  sind, die obige Folge mod 1 gegen die Null strebt. Diese vom Verf. gemachte Bemerkung findet sich bereits in der Dissertation von C. Pisot (dies. Zbl. 19, 7, 155). Verf. zeigt ferner, daß für jedes gebrochene rationale  $\alpha = \frac{a}{b} > 1$  die obige Folge unendlich viele Häufungspunkte mod 1 aufweist: Ist  $\omega$  ein solcher Häufungswert, so ist offenbar für geeignet gewähltes ganzes  $r$  auch  $\alpha\omega + \frac{r}{b}$  ein solcher. Für irrationales  $\omega$  folgt nun sofort die Behauptung: durch eine sehr einfache, aber geistreiche Überlegung wird der Satz auch im allgemeinen Fall gefolgert. Vgl. T. Vijayaraghavan, On the fractional parts of powers of a number I. J. London Math. Soc. 15, 159—160 (1940). Ref. weist ferner darauf hin, daß die Folge  $\alpha^x \pmod{1}$  untersucht wurde, für rationales  $\alpha > 1$  von K. Mahler (dies. Zbl. 19, 250) und für spezielle algebraische Werte von  $\alpha > 1$  in der obenerwähnten Dissertation von Pisot. J. F. Koksma.

## Analysis.

### Allgemeines:

● Mangoldt, Hans v.: Einführung in die höhere Mathematik für Studierende und zum Selbststudium. Vollst. neu bearb. u. erw. v. Konrad Knopp. Bd. 2. Differentialrechnung, Unendliche Reihen, Elemente der Differentialgeometrie und der Funktionentheorie. 7. Aufl. Leipzig: Hirzel 1942. XV, 633 S. RM. 15.—.

● Severi, Francesco, e Giuseppe Scorza Dragoni: Lezioni di analisi. Vol. 2, Pt. 1. Serie di funzioni. Applicazioni geometriche, integrali rettilinei. Funzioni di più variabili, derivazione e integrazione ad esse inerenti. Bologna: Nicola Zanichelli 1942. VII, 398 pag. L. 100.—.

Ein sehr ansprechendes Buch! Es verbindet eine solide Grundausbildung im



Hauptteil des Textes mit lose eingestreuten, außerordentlich vielseitigen und recht weitgehenden Ausblicken ebenso auf klassische Hauptgebiete der Gesamtanalysis wie auf deren moderne Forschungsfragen. Den Untergrund des vorliegenden Bandes II<sub>1</sub> bilden sechs Kapitel über Differential- und Integralrechnung: Vertiefte Reihenlehre, Kurvengeometrie, Bestimmte und unbestimmte Integrale, Technik der bestimmten und unbestimmten Integration, Differentialrechnung für Funktionen von mehreren reellen Veränderlichen, Kurven und Bereichintegrale. Jedes dieser Kapitel ist durch reichhaltige *Complementi ed Esercizi* abgeschlossen, die (dem Umfange nach die Hälfte des Werkes füllen und) neben einigem Übungsmaterial und Skizzen über die Ideenentwicklung in der Hauptsache trefflich geschriebene Exkurse über die modernen Vertiefungen bieten. U. a. sind hier behandelt: Jordankurven; Quadratische Formen, Tensoren, Differentialformen und symbolischer Kalkül; Reelle Funktionentheorie: Maßtheorie bis zu Lebesgue- und Denjoyintegralen, Stieltjesintegral, Analyse der Differenzierbarkeit, Fortsetzungssatz v. Whitney; Komplexe Funktionentheorie (Weierstraß und Cauchy): Elliptische und Abelsche Integrale,  $B(x, y)$ ,  $\Gamma(x)$  und schließlich eine längere Darstellung der Funktionentheorie bei mehreren komplexen Veränderlichen. Ullrich (Gießen).

● Barba, Guido: *Analisi algebrica ed introduzione all'analisi infinitesimale ad uso degli allievi della R. Accad. Aeronautica*, 1. anno. Napoli: R. Pironti (tip. B. Candido) 1940. 411 pag. L. 66.—

● Middlemiss, Ross R.: *Differential and integral calculus*. New York: McGraw-Hill 1941. X, 416 pag. \$ 2.50.

### Mengenlehre:

● Piccard, Sophie: *Sur des ensembles parfaits. Note additionnelle sur les ensembles de sommes*. (Mém. de l'univ. de Neuchâtel. T. 16.) Paris: Gauthier-Villars & Cie. 1942. 196 pag.

Etant donné deux ensembles linéaires  $E$  et  $E'$ , on désignera par  $D(E, E')$  l'ens. des distances ( $\geq 0$ ) d'un point de  $E$  à un point de  $E'$ , et par  $s(E, E')$  l'ens. des nombres  $a + b$  ( $a \in E$  et  $b \in E'$ ). On posera  $D(E) = D(E, E) =$  ens. des distances de  $E$ ;  $s(E) = s(E, E)$ . On désignera par  $E[t]$  et on appellera translation  $t$  de  $E$ , l'ens. des nombres  $a + t$  ( $a \in E$ ),  $t$  étant un nombre réel donné. — Soient  $n$  un entier  $\geq 3$ ,  $k$  un entier tel que  $1 \leq k < n - 1$  et  $a_0 = 0, a_1, a_2, \dots, a_k$  ( $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$ ) des nombres de la suite  $0, 1, \dots, n - 1$ . Soit  $\mathfrak{A} = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}_n$  l'ens. des nombres réels non négatifs qui peuvent s'écrire, dans le système de numération à base  $n$ , au moyen des seuls chiffres  $a_0, a_1, \dots, a_k$ . Soit  $A = [a_0, a_1, \dots, a_k]_n$  l'ens. des éléments de  $\mathfrak{A}$  qui sont  $\leq 1$ . Soient  $\mathfrak{F}$  la famille de tous les ens.  $\mathfrak{A}$ , et  $F$  la famille de tous les ens.  $A$  ( $n, k$  et les  $a_i$  variant). Soit  $\mathfrak{F}_n$  (resp.  $F_n$ ) la famille de tous les ens.  $\mathfrak{A}$  (resp.  $A$ ) ayant le même  $n$  donné. Les ens.  $\mathfrak{A}$  et  $A$  sont des ens. parfaits non-denses de mesure nulle. L'ens. parfait de Cantor  $[0, 2]_3$  fait partie de  $F$ . — Chapitre I. Structure des ens.  $\mathfrak{A}$  et  $A$ . Condition nécessaire et suffisante pour qu'un ens.  $A$  soit de première espèce au sens de D. Mirimanoff, c'est-à-dire présente le caractère ( $A$ ) au sens de A. Denjoy (voyez par exemple: Sur les ens. parfaits présentant le caractère ( $A$ ) [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., V. s. 29, 316—318 (1920)]); on démontre qu'il existe une infinité de tels ens. et on indique explicitement tous ceux pour lesquels  $3 \leq n \leq 10$ . Tout ens.  $A$  (tout ens.  $\mathfrak{A}$ ) n'admet qu'une seule représentation au moyen des  $a_i$ , autrement dit sa donnée détermine univoquement les  $a_i$  ainsi que  $k$  et  $n$ . Pour tout ens.  $\mathfrak{A}$ , l'ens.  $D(\mathfrak{A})$  est parfait. — Chapitre II. Mesure lebesguienne des ens.  $D(\mathfrak{A})$ . Condition nécessaire et suffisante pour que cette mesure soit nulle. Etude du cas où  $D(\mathfrak{A}) =$  l'intervalle fermé  $(0, +\infty)$  et du cas où  $\text{mes } D(\mathfrak{A}) > 0$  avec  $D(\mathfrak{A}) \neq (0, +\infty)$ . Calcul de la mesure du sous-ens. de  $D(\mathfrak{A})$  compris entre 0 et 1. Problèmes analogues pour les ens.  $D(A)$ . Dans les questions précédentes, l'A. fait jouer un rôle essentiel à l'ens.  $D(K)$ ,  $K$  étant l'ens. des nombres  $a_0, a_1, \dots, a_k$ . — Chapitre III. Tout



ens.  $A$  contient un sous-ens. indénombrable  $E$  tel que  $D(E) \subset A$ . Il existe des ens.  $\mathfrak{A}$  (des ens.  $A$ ) qui ne sont ens. des distances d'aucun ens. linéaire; il en est ainsi pour l'ens. parfait de Cantor. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un ens. de  $\mathfrak{F}_n$  (resp.  $F_n$ ) ait pour ens. des distances un ens. de  $\mathfrak{F}_n$  (resp.  $F_n$ ); de tels ens. existent effectivement pour  $n$  convenablement choisi. — Chapitre IV. Quelques problèmes et résultats analogues à ceux des Chapitres II et III concernant les ens.  $s(\mathfrak{A})$  et  $s(A)$  au lieu des ens.  $D(\mathfrak{A})$  et  $D(A)$ . Etude de l'ens.  $s(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  et de sa mesure ( $\mathfrak{A} \in \mathfrak{F}_n$  et  $\mathfrak{B} \in \mathfrak{F}_n$ ). — Chapitre V. Etude de l'ens.  $AA[t]$  intersection d'un ens.  $A$  et de sa translation  $t \geq 0$ . Si  $t \notin D(A)$ , on a évidemment  $AA[t] = 0$ . Soient  $A_1, A_2, A_3$  les ens. des  $t \in D(A)$  tels que  $AA[t]$  soit respectivement fini, infini dénombrable, indénombrable; on a  $D(A) = A_1 + A_2 + A_3$ . Condition pour que  $t \in A_1 (\in A_2)$ . Etude de la puissance des ens.  $A_1, A_2$  et  $A_3$ . Relations entre la puissance de  $A_1$  et celle de  $A_2$ . L'ens.  $A_1$  n'est jamais vide; il peut être fini (et ne comprend alors qu'un seul élément), infini dénombrable ou indénombrable. L'ens.  $A_2$  est vide pour tout  $A$  de première espèce; il peut être infini (dénombrable ou non). L'ens.  $A_3$  est toujours indénombrable. — Les Chapitres précédents sont illustrés de très nombreux exemples numériques qui fournissent le matériel pour des théorèmes d'existence tels que ceux mentionnés plus loin. — Note additionnelle: Théorèmes relatifs aux ens. de sommes  $s(E)$  et  $s(E, E')$ ,  $E$  et  $E'$  étant des ens. linéaires quelconques. Ces théorèmes sont pour la plupart complètement analogues à des propositions antérieurement obtenues par l'A. (ce Zbl. 23, 18) concernant les ens.  $D(E)$  et  $D(E, E')$ ; ils énoncent surtout des propriétés topologiques et des propriétés concernant la mesure des ens. considérés; je citerai par exemple les suivants: Si  $E$  et  $E'$  sont deux ens. linéaires mesurables ( $L$ ) de mesures  $> 0$ , l'ens.  $s(E, E')$  contient un intervalle. Si deux ens. linéaires  $E$  et  $E'$  de 2<sup>ème</sup> catégorie de Baire jouissent de la propriété de Baire, l'ens.  $s(E, E')$  contient un intervalle. Il existe un ens. linéaire  $E$  tel que  $\text{mes } D(E) = 0$  alors que  $s(E) = (0, +\infty)$ . Il existe un ens. linéaire  $E$  tel que  $D(E) = (0, +\infty)$  alors que  $\text{mes } s(E) = 0$ . Il existe deux ens. linéaires parfaits bornés  $E$  et  $E'$  tels que  $\text{mes } s(E) = \text{mes } s(E') = 0$  et que  $\text{mes } s(E, E') > 0$ . Il existe deux ens. linéaires parfaits bornés  $E$  et  $E'$  tels que  $\text{mes } s(E) > 0$ ,  $\text{mes } s(E') > 0$  et que  $\text{mes } s(E, E') = 0$ . Etc. Conditions pour que certains ens. linéaires finis  $S$  soient de la forme  $s(E)$ . A. Appert (Rennes).

**Jones, F. B.: Monotonic collections of peripherally separable connected domains.** Bull. Amer. Math. Soc. 47, 661—664 (1941).

Es sei  $S$  ein lokal zusammenhängender, metrischer Raum. Ein System  $G$  von Mengen heißt monoton, wenn für je 2 Mengen  $g_1, g_2$  aus  $G$  entweder  $g_1$  in  $g_2$  oder  $g_2$  in  $g_1$  enthalten ist; ein Teilsystem  $H$  von  $G$  „läuft aufwärts durch  $G$ “, wenn zu jedem  $g$  von  $G$  ein  $g$  enthaltendes Element  $h$  von  $H$  existiert. Schließlich nennt Verf. eine Punktmenge peripher-separabel, wenn ihre Begrenzung separabel ist. Verf. beweist: Ist  $G$  ein monotones System von peripher-separablen, zusammenhängenden, offenen Mengen von  $S$ , so enthält  $G$  mindestens ein abzählbares, monotones Teilsystem von  $H$ , welches durch  $G$  aufwärts läuft. Nöbeling (Erlangen).

**Best, E.: On sets of fractional dimensions. 2.** Proc. Cambridge Philos. Soc. 37, 127—133 (1941).

Für die 1. Mitt. vgl. dies. Zbl. 23, 305. — Jeder Zahlenreihe  $\sum \xi_n^{-1}$  können zwei Zahlen  $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} (\log n / \log \xi_n)$  und  $\lambda = \overline{\lim} (\log n / \log \xi_n)$  sowie auch die Menge  $E$  aller Zahlen  $x = \sum_2 \frac{x_n}{n!}$ , wo  $0 \leq x_n < [\xi_n] + 1 \leq n$  und  $x_n$  ganzzahlig ist, zugeordnet werden. Es wird die Beziehung  $\lambda^{-1} \leq \delta \leq \mu^{-1}$  bewiesen, wobei  $\delta$  die Dimensionszahl im Sinne von Besicovitch ist (d. i. eine derartige Zahl, daß das  $t^s$ -Maß der Menge  $E$  gleich  $\infty$  für  $s < \delta$  und 0 für  $s > \delta$  ist [vgl. Besicovitch, Math. Ann. 101, 161—193 (1929)]). Ist  $\xi_n = n^\theta$  mit  $0 \leq \theta \leq 1$ , so ist  $\delta = \theta$ . Novák (Brünn).



## Differentiation und Integration reeller Funktionen:

**Groot, J. de:** On the extension of continuous functions. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **45**, 842—843 (1942).

Wenn jede reelle Funktion, die auf einer Teilmenge  $A$  eines metrischen Raumes erklärt und dort stetig ist, sich auf den ganzen Raum stetig erweitern läßt, so ist  $A$  abgeschlossen. Die Theorie der bikompakten Hüllen zeigt jedoch, daß dies in den normalen Räumen nicht der Fall ist. J. Novák (Brünn).

**Lijn, G. van der:** Une généralisation de l'intégrale de Radon. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **10**, 168—175 (1941).

Es handelt sich, kurz gesagt, um die Übertragung eines Riemann-Stieltjes-Integrals  $\int_E x(s) d\varphi(E)$  auf den Fall, daß die Werte der additiven Mengenfunktion einem (linearen, genormten [normé], vollständigen) Banachraum  $\mathfrak{B}$  angehören. Im einzelnen: Es sei  $k$  ein Körper von Punktmengen  $E$ . Weiter sei  $\varphi(E)$  eine eindeutige, additive Mengenfunktion über  $k$ , deren Werte in  $\mathfrak{B}$  liegen. Schließlich sei  $x(s)$  eine eindeutige, reelle Funktion  $x(s)$  der Punkte  $s$  aus  $E$ , welche „meßbar“ ist über  $k$ , d. h. für welche  $E[x(s) \leq \alpha] \in k$  und  $E[x(s) \leq \alpha] \in k$  für alle reellen Zahlen  $\alpha$ . Ist dann  $\varphi(E)$  von beschränkter Variation über  $E$  und  $x(s)$  (meßbar sowie) beschränkt über  $E$ , so ist  $x(s)$  integrierbar über  $E$ , d. h. es existiert der Limes  $\int_E x(s) d\varphi(E)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  aller Summen  $\sum_{r=1}^n l_r \varphi(E_r)$  mit  $0 < l_r - l_{r-1} < \varepsilon$ ,  $r = 1, \dots, n$ , und mit  $l_0 = l < x(s) < l_n = L$ , sowie mit  $E_r = E[l_{r-1} < x(s) \leq l_r]$ . Wie üblich folgt dann u. a., daß dieses Integral additiv über  $k$  bezüglich  $E$  und linear bezüglich  $x(s)$  ist. Die Integraldefinition wird schließlich in bekannter Weise auf gewisse unbeschränkte  $x(s)$  ausgedehnt. *Haupt.*

**Cesari, Lamberto:** Caratterizzazione analitica delle superficie continue di area finita secondo Lebesgue. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **10**, 253—295 (1941).

Cet article est la première partie d'un travail où l'A., généralisant un théorème connu de Tonelli sur l'aire des surfaces  $z = z(x, y)$ , établit qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface continue  $S: x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$  ( $0 \leq u, v \leq 1$ ) ait une aire finie selon Lebesgue, est que les trois transformations planes  $\Phi_1: x = x(u, v), y = y(u, v)$ ;  $\Phi_2: x = x(u, v), z = z(u, v)$ ;  $\Phi_3: y = y(u, v), z = z(u, v)$  soient à variation bornée au sens qu'il définit (le caractère suffisant de la condition est démontré dans la seconde partie, cfr. le travail suivant). Etant donnée une transformation continue  $\Phi: x = x(u, v), y = y(u, v)$  du carré  $\bar{A}$  ( $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ ) en un ensemble contenu dans un carré  $K$ , soient  $\{r_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) une subdivision de  $\bar{A}$  en régions de Jordan,  $c_i$  l'image de la frontière de  $r_i$ ,  $O(x, y; c_i)$  l'indice topologique de Kronecker relatif à  $c_i$ . L'A. appelle fonction caractéristique et variation totale de la transformation  $\Phi$ , respectivement  $\Psi(x, y; \Phi) = \overline{\text{Corne}} \sum_{i=1}^n |O(x, y; c_i)|$  pour toutes les subdivisions possibles de  $\bar{A}$  et  $W(\Phi) = \iint_K \Psi(x, y; \Phi) dx dy$ . Propriétés de ces notions pour une suite de transformations convergeant au sens de Fréchet. Caractère nécessaire de la condition d'aire finie. Remarques sur les fonctions semi-continues. Etude des continus maximaux  $g$  de  $\bar{A}$  dont l'image est un point  $(x, y, z)$ ; en particulier, de ceux qui morcellent le plan  $(u, v)$ .

Frédéric Roger (Berlin).

**Cesari, Lamberto:** Caratterizzazione analitica delle superficie continue di area finita secondo Lebesgue. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **11**, 1—42 (1942).

Diese Abhandlung bildet den zweiten Teil einer langen Arbeit, die Verf. dem Gegenstand gewidmet hat. Für den ersten Teil vgl. vorsteh. Referat. Es wird folgendes endgültige Ergebnis bewiesen:

Die Fläche

$$S: x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (0 \leq u, v \leq 1)$$

hat dann und nur dann einen endlichen Lebesgueschen Flächeninhalt  $L(S)$ , wenn die ebenen Transformationen

$$\begin{aligned} \Phi_1: x &= x(u, v), & y &= y(u, v), & \Phi_2: y &= y(u, v), & z &= z(u, v), \\ \Phi_3: z &= z(u, v), & x &= x(u, v) \end{aligned}$$

alle drei von beschränkter Variation sind. Bezeichnet  $W(\Phi_i)$  die totale Variation von  $\Phi_i$ , so ist  $W(\Phi_i) \leq L(S) \leq W(\Phi_1) + W(\Phi_2) + W(\Phi_3)$

(und dieses Ergebnis gilt für eine beliebige stetige Fläche). *G. Scorza Dragoni.*

**Veen, S. C. van:** Analytische Fortsetzung im reellen Gebiet. *Mathematica*, Zutphen B 11, 129—132 (1943) [Holländisch].

Der hier bewiesene Satz scheint leider falsch zu sein. Er heißt: Wenn  $f(x)$  für  $|x| < b$  unbeschränkt oft differenzierbar ist und in einem Teilgebiet  $|x| < a$  durch eine Potenzreihe dargestellt wird, die in  $|x| < c \leq b$  noch konvergiert, so stellt die Potenzreihe auch in diesem größeren Gebiet  $|x| < c$  die Funktion  $f(x)$  dar. Gegenbeispiel:  $f(x) = 0$  für  $x \leq a$ ,  $f(x) = \exp. \left( -\frac{1}{x-a} \right)$  für  $x > a$ . *van der Waerden.*

### Allgemeine Reihenlehre:

**Neder, Ludwig:** Eine notwendige und hinreichende Bedingung für Doppelreihen. *Math. Z.* 48, 497—499 (1942).

Es sei (1)  $\sum_{\mu, \nu=1}^{\infty} a_{\mu\nu}$  eine beliebige Doppelreihe mit den Teilsummen (2)  $s_{mn} = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu}$  ( $m, n = 1, 2, \dots$ ). Verf. zeigt: Die Doppelreihe (1) ist dann und nur dann samt allen ihren Zeilen und Spalten konvergent, wenn ihre Teilsummen (2) eine Entwicklung der Form  $s_{mn} = s - \varphi_m - \psi_n + \chi_{mn}$  mit  $\varphi_m \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$ ,  $\psi_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ ,  $\chi_{mn} \rightarrow 0$  für  $m + n \rightarrow \infty$  zulassen. *F. Lösch (Rostock).*

**Macphail, M. S.:** Cesàro summability of a class of series. *Bull. Amer. Math. Soc.* 47, 483—487 (1941).

Von einem Satz von H. L. Garabedian (dies. Zbl. 21, 400), welcher jedoch eine unmittelbare Folge aus der Eulerschen Reihentransformation ist, gibt Verf. im wesentlichen die folgende Verallgemeinerung: Ist  $a_n$  ein Polynom  $k$ -ten Grades in  $n$  und  $z \neq 1$  eine komplexe Zahl vom Betrage 1, dann ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  genau  $C_{k+1}$ -summierbar zur Summe  $-\sum_{\alpha=0}^k z^{\alpha} (z-1)^{-\alpha-1} \Delta^{\alpha} a_0$ . *G. Lyra (Göttingen).*

**Obreschkoff, Nikola:** Über das Riemannsche Summierungsverfahren. *Math. Z.* 48, 441—454 (1942).

Der Satz von Riemann, daß die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^2$  für jedes reelle  $h \neq 0$  konvergiert und ihre Summe gegen  $s$  strebt für  $h \rightarrow 0$ , wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  zum Wert  $s$  konvergiert, gibt Veranlassung, eine beliebige, nicht notwendig konvergente Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  nach dem Riemannschen Verfahren der Ordnung  $p$  summierbar, kurz  $(R, p)$ -summierbar, zum Wert  $s$  zu heißen für  $p = 2$  und allgemeiner für jedes ganze  $p \geq 0$ , wenn die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^p$  für  $h \neq 0$  konvergiert und gegen  $s$  strebt für  $h \rightarrow 0$ . Über

die Abhängigkeit der Summierungsverfahren von Cesàro und Riemann weiß man durch L. Fejér [*Math. Ann.* 58, 501—569 (1904)], daß jede  $(C, 1)$ -summierbare Reihe zur gleichen Summe  $(R, 4)$ -summierbar ist, und allgemeiner durch E. Kogbetliantz [*J. Math. pures appl.* 5, 125—196 (1924)], daß jede  $(C, \alpha)$ -summierbare Reihe



( $0 < \alpha < p-1$ ) zur gleichen Summe  $(R, p)$ -summierbar ist. Dieses Ergebnis verschärft Verf. folgendermaßen: Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sei für ein  $\alpha < p-1$  ( $C, \alpha+1$ )-summierbar und für ihre Cesàroschen Mittelwerte  $s_n^{(\alpha)}$  der Ordnung  $\alpha$  sei  $n^{-1}(|s_1^{(\alpha)}| + |s_2^{(\alpha)}| + \dots + |s_n^{(\alpha)}|)$  beschränkt; dann ist die Reihe auch  $(R, p)$ -summierbar zur gleichen Summe. Besonders prägnant ist das weitere Ergebnis: Ist eine Reihe  $|C, p|$ -summierbar, so ist sie auch  $(R, p)$ -summierbar zur gleichen Summe. — Der andere auf Riemann zurück-

gehende Satz, daß  $\lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^2 = 0$  ist für eine Nullfolge  $a_n$ , gibt Veranlassung,

eine Folge  $s_n$  ( $R_1, p$ )-limitierbar zum Wert  $s$  zu heißen ( $p$  ganz,  $>1$ ), wenn

$$h \sum_{n=1}^{\infty} s_n \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^p \text{ konvergiert und für } h \rightarrow 0 \text{ gegen}$$

$$s \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^p dx = s \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^p$$

strebt. Eine Folge  $s_n$  ist sicher dann  $(R_1, p)$ -limitierbar zum Wert  $s$ , wenn sie  $(C, \alpha+1)$ -limitierbar zu diesem Wert ist für ein  $\alpha < p-1$  und wenn die arithmetischen Mittel der  $|s_n^{(\alpha)}|$  beschränkt sind.

Meyer-König (Stuttgart).

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

**Klingst, Anna:** Eine Verallgemeinerung der Euler-Maclaurinschen Reihe und der Bernoullischen Zahlen. S.-B. Akad. Wiss. Wien IIa 150, 221—256 (1941).

In der Arbeit werden aus der allgemeinen Quadraturformel

$$\int_{a_0}^{a_n} f(x) dx = \sum_0^n L_j f(a_j) + R$$

durch geeignete Umformung und partielle Integration des Restgliedes sog. höhere Euler-Maclaurinsche Reihen gewonnen, deren Koeffizienten naheliegender als höhere Bernoullische Zahlen bezeichnet werden. Es wird weiter eine hinreichende Bedingung für den Vorzeichenwechsel in der Folge der nicht verschwindenden höheren Bernoullischen Zahlen angegeben; ist diese Bedingung für eine Quadraturformel erfüllt, so kann das Restglied der zugehörigen Euler-Maclaurinschen Quadraturformel so dargestellt werden, daß eine einfache Abschätzung des Formelfehlers möglich ist. Den Abschluß der Arbeit bildet die Untersuchung einiger Cotesscher Quadraturformeln.

Henning Müller (Darmstadt).

**Lipka, Stephan:** Integralsätze über Polynome mit lauter reellen Nullstellen. Math. Ann. 118, 485—496 (1942).

Soit  $f(x)$  un polynome de degré  $n$  ayant  $n$  racines réelles  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ ; soient  $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{n-1}$  les racines de  $f'(x)$ ; si  $x_2 - x_1 \geq x_3 - x_2$ , et si  $f(x) > 0$

dans l'intervalle  $(x_1, x_2)$ , l'Au. démontre qu'on a  $\int_{y_1}^{y_2} f(x) dx \geq 0$ , l'égalité n'ayant lieu

que pour  $n=3$ , et  $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$ . Il en déduit des relations entre les plus petites racines de  $f(x)$  et de ses deux premières dérivées. Il donne ensuite une nouvelle démonstration et une extension du théorème suivant de Grünwald [Mat. fiz. Lap. 46, 31—57 (1939); ce Zbl. 21, 213]: si  $x_{n-1} < x_n$ , et si  $f(x) > 0$  pour  $x > x_n$ ,

on a  $\int_{x_{n-1}}^{x_n + (x_n - y_{n-1})} f(x) dx \geq 0$ .

J. Dieudonné (Nancy).

**Feldheim, E.:** Una modificazione della formula di interpolazione di Hermite. Atti Accad. Sci. Torino 77, 516—525 (1942).

Bildet man zu einem vorgegebenen System von Interpolationspunkten im Inter-

valle  $(a, b)$  das Lagrangesche Interpolationspolynom  $(n-1)$ -ten Grades  $L_n[f(x)]$ , das im  $n$ -ten System von Interpolationspunkten die gleichen Werte annimmt wie eine vorgegebene stetige Funktion  $f(x)$ , so gilt bekanntlich nicht immer die Beziehung  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n[f(x)] = f(x)$ . — Ein bekannter Satz von Fejér besagt hingegen, daß, wenn man als System der Interpolationspunkte das der Nullstellen der Tschebycheff-Polynome 1. Art wählt und das Lagrangesche Interpolationspolynom  $L_n[f(x)]$  durch das Hermite'sche Polynom  $(2n-1)$ -ten Grades  $H_n(x)$  ersetzt, für das in den  $n$  Punkten  $x_\nu = \frac{(2\nu-1)\pi}{2n}$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) die Beziehungen  $H_n(x_\nu) = f(x_\nu)$ ,  $H'_n(x_\nu) = f'(x_\nu)$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ) erfüllt sind, wobei  $f(x)$  eine in  $(-1, +1)$  vorgegebene stetige Funktion bedeutet, dann gleichmäßig im Intervalle  $(-1, +1)$  die Beziehung  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(x) = f(x)$  gilt. Verf. verfolgt das Ziel, den Grad der Interpolationspolynome im Fejérschen Satz zu erniedrigen und skizziert kurz den Beweis des folgenden Satzes: Interpoliert man eine im Intervall  $(-1, +1)$  vorgegebene stetige Funktion  $f(x)$  auf dem System der Nullstellen der Tschebyscheff'schen Polynome 1. Art durch Hermite'sche Polynome  $H_n(x)$  der Ordnung  $2n-2 (< 2n-1)$ , die in den  $n$  Interpolationsstellen die gleichen Werte haben wie  $f(x)$ , und deren Ableitungen daselbst mit Ausnahme eines Punktes (Ausnahmepunktes) mit  $f'(x)$  zusammenfallen, dann konvergiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(x)$  gegen  $f(x)$  gleichmäßig in den Intervallen von  $(-1, +1)$ , die eine Umgebung des Punktes ausschließen, gegen den die Ausnahmepunkte konvergieren.

Giovanni Sansone (Firenze).

● Salem, Raphaël: Essais sur les séries trigonométriques. (Actualités scient. et industr. Nr. 862. Ensembles et fonctions. Exposés publiés par A. Denjoy. III.) Paris: Hermann & Cie. 1940. 87 pag.

Le travail contient une série de résultats nouveaux concernant les coefficients des séries trigonométriques et leur convergence. Dans le chap. I sont traitées les séries

à coefficients monotones. Citons le théorème suivant: Soit  $f(x) = \sum_1^\infty \frac{\sin nx}{\psi(n)}$ , où  $\psi(n)$

est positive, non décroissante, infinie avec  $n$ . Si  $\psi(n+1) - \psi(n)$  n'est jamais croissante,  $f(x)$  est infinie ou simplement discontinue au voisinage de l'origine, positive pour  $x > 0$ , et  $f(x) \sim \left[ x\psi\left(\frac{1}{x}\right) \right]^{-1}$  au voisinage de  $x = 0$ ,  $\psi(u)$  étant définie pour  $u \geq 0$  de façon à n'être jamais décroissante et à avoir une dérivée jamais croissante. Si  $\psi(n+1) - \psi(n)$  n'est jamais décroissante (ou même seulement si  $\psi(n)/n$  n'est jamais décroissante),  $f(x)$  est continue, ou bien simplement discontinue à l'origine, positive

pour  $x > 0$ , et on a dans le voisinage de ce point  $f(x) \sim x \int_1^{1/x} \frac{u}{\psi(u)} du$ . On a un résultat analogue pour  $\sum_1^\infty \frac{\cos nx}{\varphi(n)}$ . Le chap. II contient un théorème concernant les conditions

nécessaires et suffisantes pour que la série  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  soit une série

de Fourier [voir note de l'au. dans C. R. Acad. Sci., Paris 192, 144—146 (1931); ce Zbl. 1, 15]. Le chap. III est consacré à une inégalité pour les polynômes trigonométriques, donnée auparavant par l'au. (ce Zbl. 7, 112). Dans le chap. IV l'au. s'occupe de la question de déterminer les nombres  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , tels que la série

$\sum_1^\infty \varrho_n \cos(nx - \alpha_n)$ ,  $\varrho_n > 0$ ,  $\sum_1^\infty \varrho_n^2 < \infty$ , soit une série de Fourier d'une fonction continue. Il démontre par un exemple que cela est toujours possible si la série  $\sum \sqrt{R_n}(n \sqrt{\log n})^{-1}$ , où  $R_n = \sum_{p=1}^n \varrho_p^2$ , est convergente, et que, sans hypothèses parti-



culières, ce résultat ne peut pas être amélioré. Il obtient un autre résultat intéressant, en généralisant certains théorèmes de Van der Corput (voir l'au., ce Zbl. 7, 113; 8, 11; 12, 104). Le chap. V contient des généralisations de deux théorèmes de S. Bernstein (voir l'au., ce Zbl. 12, 295). Le chap. VI contient des généralisations du critère de Jordan pour la convergence des séries de Fourier (voir l'au., ce Zbl. 19, 300) et dans le chap. VII est étudiée une généralisation de la sommation de Poisson et d'Abel. D'après un théorème de Kolmogoroff et Selivestroff on a presque partout  $\lim_{s \rightarrow 0} \sum \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{1 + s \sqrt{\log n}} = f(x)$ , si  $f(x)$  est continue. L'au. démontre que cette convergence est uniformément valable partout. Le chap. VIII contient le résultat suivant :

Soit  $\omega(n)$  une fonction infiniment croissante et soit  $\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

la série de Fourier d'une fonction intégrable  $L$ . Supposons que la série  $\sum (a_n^2 + b_n^2) \omega(n)$  converge et soit  $(n_k)$  une suite d'entiers telle que l'on ait  $\sum_{k=1}^\infty A^{-\omega(n_k)} < \infty$ ,  $A$  étant une constante aussi grande que l'on voudra. Alors la suite  $S_k(x) = \sum_{i=1}^{n_k} (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$

converge presque partout, quand  $n_k \rightarrow \infty$ . Le cas  $\omega(n) = \log n$  est celui de Kolmogoroff et Selivestroff. Le chapitre contient aussi quelques résultats relatifs à la suite  $S_k(x)$  en relation avec le module de continuité intégral. Dans le dernier chapitre l'au. démontre que dans la série trigonométrique  $\sum_1^\infty r_n e^{2\pi i(n x - s_n)}$ , ( $0 \leq x < 1$ ,  $r_n \geq 0$  étant donnés), on peut déterminer les  $s_n$  de façon que cette série diverge sur un ensemble ayant la puissance du continu (voir l'au., ce Zbl. 17, 303; 23, 29). *N. Obreschkoff*.

**Bosanquet, L. S.:** The absolute Cesàro-summability problem for differentiated Fourier series. *Quart. J. Math.* 12, 15—25 (1941).

Si la fonction  $h(t)$  est à variation bornée dans  $(0, \eta)$ ,  $\eta > 0$  et tend vers  $s$  lorsque  $t \rightarrow 0$  on dit que  $h(t)$  tend absolument vers  $s$  pour  $t \rightarrow 0$ , abrégé  $h(t) \rightarrow s |C, 0|$ . Supposons que la fonction  $g(t)$  soit intégrable  $L$  dans  $(\varepsilon, a)$  pour chaque  $\varepsilon > 0$  et qu'il existe une fonction continue  $G_{\lambda+1}(t)$  telle que  $G_{\lambda+1}^{(\lambda+1)}(t) = g(t)$  pour presque toutes les valeurs de  $t$  dans  $(0, a)$  et que  $t^{-\lambda} G_{\lambda+1}(t) \rightarrow 0 |C, 0|$  pour  $t \rightarrow 0$ . L'au. dit que  $g(t)$  est intégrable  $|C_\lambda L|$  dans  $(0, a)$ . Il démontre ce théorème: Soit  $f(t)$  une fonction périodique de période  $2\pi$ , intégrable  $L$  dans  $(-\pi, \pi)$  et soit  $\alpha > 1$ . La condition nécessaire et suffisante pour que la série dérivée de la série de Fourier de la fonction  $f(t)$  soit sommable  $|C, \alpha + 1|$  avec la somme  $s$  pour le point  $t = x$  est que la fonction  $[f(x+t) - f(x-t)] : 4 \sin \frac{t}{2}$  soit intégrable  $|C_\lambda L|$  pour un  $\lambda$  dans  $(0, \pi)$  et que sa série de Fourier soit sommable  $|C, \alpha|$  avec la somme  $s$ . *N. Obreschkoff* (Sofia).

### Spezielle Orthogonalfunktionen :

**Timman, R.:** Eine Verallgemeinerung der Stirlingschen Formel für die  $\Gamma$ -Funktion. *Mathematica*, Zutphen B 11, 102—108 (1943) [Holländisch].

Die vom Verf. betrachtete Verallgemeinerung der Stirlingschen oder besser der Gudermannschen Formel ist die folgende

$$(1) \quad \log \Gamma(z+a) = \left(z+a - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m(m+1)(m+2)} \cdot \frac{\varphi'_{m+2}(a)}{z^m}.$$

worin  $\varphi'_m$  die Ableitungen der durch

$$t(e^{at} - 1)/(e^t - 1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(a)}{m!} t^m$$

definierten Bernoullischen Polynome  $\varphi_m(a)$  sind. (1) gilt für große  $|z|$  mit  $|\arg(z+a)| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta$ ,  $|\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta$ ,  $\delta > 0$ . (1) ist bekannt. Der Beweis des

Verf. geht so vor, daß er für  $\mu(z) = \log \Gamma(z+a) - (z+a-\frac{1}{2}) \log z + z - \frac{1}{2} \log 2\pi$  eine Differenzdifferentialgleichung 1. Ordnung aufstellt und durch die Laplace-

Transformation  $\mu(z) = \int_0^\infty e^{-zt} F(t) dt$  integriert zu

$$F(t) = \frac{1}{t} \left\{ -\frac{1}{t} + \frac{e^{-at}}{1-e^{-t}} + a - \frac{1}{2} \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \cdot \frac{\varphi'_{m+2}(a)}{(m+2)!} \cdot \frac{t^{m-1}}{t^{m-1}}.$$

Die einzige Schwierigkeit liegt in den erforderlichen Konvergenzbeweisen und Abschätzungen.

Harald Geppert (Berlin).

● Lagrange, R.: *Polynomes et fonctions de Legendre*. Paris: Gauthier-Villars, 1940. 84 pag. ffrs. 25.—.

Feldheim, E.: Su un sistema di polinomi ortogonali a distribuzione del tipo di Stieltjes. *Atti Accad. Sci. Torino* **77**, 526—536 (1942).

Die Polynome

$$l_n^{(\alpha)}(x) = e^{-n\lambda} \sum_{\nu=0}^n (1-e^\lambda)^\nu \binom{n+\alpha}{n-\nu} (x)^\nu, \quad (\lambda > 0, \Re(\alpha) > -1),$$

die für den Fall  $\alpha = 0$  schon von M. J. Gottlieb (dies. Zbl. **18**, 252) untersucht worden sind, genügen der Beziehung

$$\sum_{x=0,1,2,\dots} j(x) l_m^{(\alpha)}(x) l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} e^{-n\lambda} (1-e^{-\lambda})^{-(\alpha+1)} \delta_{m,n},$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots; \delta_{m,n} = 0 \text{ für } m \neq n; \delta_{n,n} = 1),$$

$$j(x) = \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)} e^{-\lambda x}$$

und bilden daher bezüglich der stückweise stetigen Belegungsfunktion  $j(x)$  ein Orthogonalsystem. Diese Polynome hängen mit den Laguerreschen Polynomen  $L_n^{(\alpha)}(x)$  durch die Grenzbeziehung  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} l_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = L_n^{(\alpha)}(x)$  zusammen und überdies gilt für beliebiges  $t$  und  $x = 0, 1, 2, \dots$  die Relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n l_n^{(\alpha)}(x) : [(1-e^{-\lambda})^n \Gamma(n+\alpha+1)] = x! e^{t e^{-\lambda}} : (1-e^{-\lambda}) L_x^{(\alpha)}(t) : \Gamma(x+\alpha+1),$$

aus der man daher eine erzeugende Funktion jener Polynome gewinnt. Für sie gilt weiterhin der folgende asymptotische Ausdruck für  $n \rightarrow \infty$

$$|l_n^{(\alpha)}(x)| = j(x)^{-\frac{1}{2}} (1-e^{-\lambda})^{-\frac{\alpha+1}{2}} O\left(\frac{\alpha}{n^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\lambda n}{2}}\right).$$

Giovanni Sansone (Firenze).

Ince, E. L.: The periodic Lamé functions. *Proc. roy. Soc. Edinburgh* **60**, 47—63 (1940).

Verf. geht von der Differentialgleichung der Laméschen Potentialfunktionen:

$$\frac{d^2 y}{du^2} = \{n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 u - h\} y$$

aus und setzt als Lösungen Reihen der Form:

$$A_0 + \sum A_{2r} \operatorname{sn}^{2r} u, \quad \operatorname{dn} u \{C_0 + \sum C_{2r} \operatorname{sn}^{2r} u\}, \quad \operatorname{cn} u \{A_0 + \sum A_{2r} \operatorname{sn}^{2r} u\},$$

$$\sum B_{2r+1} \operatorname{sn}^{2r+1} u, \quad \operatorname{cn} u \sum B_{2r+1} \operatorname{sn}^{2r+1} u$$

ein. Für die Koeffizienten ergeben sich jedesmal lineare Gleichungen, bei denen jede Gleichung, mit Ausnahme der ersten, drei aufeinander folgende Koeffizienten enthält. Für den Parameter  $h$  findet man Kettenbruchentwicklungen, welche sich für jeden Wert von  $n$  auswerten lassen. Verf. zeigt, daß die erste obengenannte Lösungsform mit der zweiten bei einer reellen Periode  $2K$  identisch ist, während die dritte angeschriebene Lösungsform zur reellen Periode  $4K$  gehört. Von den acht üblichen Klassen der Laméschen Potentialfunktionen bleiben nur vier wesentlich verschiedene



Klassen übrig. Verf. führt, und das bedeutet einen neuen, wesentlich vereinfachenden Schritt, eine neue Schreibweise für diese Laméschen Funktionen ein, bei der der obere Zeiger die Zahl der Nullstellen im Bereich:  $0 \leq u \leq 2K$  darstellt, während der untere Zeiger eine der vier Klassen andeutet. Die Berechnung des Parameters  $h$  wird für verschiedene Werte von  $k$  durchgeführt und in Tabellen zusammengestellt. Endlich geht Verf. mit Hilfe des Sturmschen Vergleichssatzes auf die asymptotischen Ausdrücke für  $h$  ein. Er betrachtet den Entartungsfall  $k^2 = 1$  und gibt schließlich eine Reihe linearer homogener Integralgleichungen, denen die berechneten Laméschen Funktionen genügen.

*M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

**Ince, E. L.:** *Further investigations into the periodic Lamé functions.* Proc. roy. Soc. Edinburgh **60**, 83—99 (1940).

Verf. erzielt eine wesentliche Vereinfachung bei der Behandlung der periodischen Laméschen Potentialfunktionen, indem er, von einer Bemerkung Ch. Hermites ausgehend, eine neue unabhängige Veränderliche einführt, welche durch  $v = am(u, k)$  definiert ist. Die Lamésche Potentialgleichung in der Jacobischen Form wird mit Hilfe dieser unabhängigen Veränderlichen auf eine neue Gestalt gebracht, welche sich durch Fourierreihen integrieren läßt. Verf. geht mit solchen Reihen in die Differentialgleichung ein und erhält für die Koeffizienten lineare Gleichungen, welche alle, außer der ersten, jeweils drei Koeffizienten enthalten. Für den Parameter der Laméschen Gleichung ergibt sich eine Kettenbruchentwicklung, welche dieselbe auch numerisch zu berechnen gestattet. Verf. stellt unter diesen Gesichtspunkten die Formeln für die vier verschiedenen Klassen Laméscher Potentialfunktionen zusammen. Hierauf beweist Verf., daß für nicht-ganze Werte von  $n$  keine linear unabhängigen periodischen Lösungen der Laméschen Differentialgleichung für die gleichen Parameterwerte auftreten können. Hierauf geht Verf. von einer Integralgleichung für die periodischen Laméfunktionen aus und entwickelt den Kern in eine Reihe nach den obengenannten Laméschen Funktionen. Weiter betrachtet Verf. im allgemeinen die periodischen Lösungen der Laméschen Differentialgleichung, bei denen die Periode auch größer als die Grundperiode sein kann und erhält für diese Lösungen auf analogem Wege wie oben genannt Reihen-ausdrücke. Auch die Berechnung des Parameters  $h$  läßt sich hier in analoger Weise durchführen und Verf. gibt einige Tabellen berechneter Werte als Beispiele.

*M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

**Erdélyi, A.:** *On Lamé functions.* Philos. Mag., VII. s. **31**, 123—130 (1941).

Die vorliegende Arbeit baut auf der vorletztgenannten Arbeit von Ince auf, welche sich mit Eigenwerten und Eigenfunktionen der Laméschen Potentialgleichung (vgl. Ref., Erg. Math. 1, H. 3; dies. Zbl. 5, 160) für beliebige reelle Werte des Parameters  $n$  befaßt. Verf. stellt zunächst einige Beziehungen zwischen Jacobischen elliptischen Funktionen mit komplementären Moduln auf. Mit Hilfe dieser Beziehungen beweist er unmittelbar im Anschluß an einen Satz von Ince den entsprechenden Satz über die Existenz Laméscher periodischer sowie halbperiodischer Funktionen, deren Periode gleich der imaginären Periode der elliptischen Funktionen ist. Hierauf behandelt er die Frage, für welche Wertepaare des Parameters  $n$  und des Eigenwertes Lamésche Funktionen existieren, welche gleichzeitig die reelle und die imaginäre Periode aufweisen. Diese Wertepaare werden als Schnittpunkte von Eigenwertkurven erhalten, welche zur reellen und zur imaginären Periode der Laméschen Differentialgleichung gehören. Jene Schnittpunkte, denen ganzzahlige Werte des Parameters  $n$  entsprechen, führen auf Lamésche Polynome, d. h. auf Lamésche Funktionen im engeren Sinne. Die Lage dieser Schnittpunkte wird berechnet, und Verf. kommt zu einer Klasseneinteilung derselben, welche bei einer Abzählung genau die erforderliche Zahl Laméscher Polynome ergibt.

*M. J. O. Strutt.*

**Giraud, Georges:** *Sur les zéros de certaines fonctions de Bessel et de Whittaker.* C. R. Acad. Sci., Paris **214**, 649—651 (1942).

L'aut. s'occupe de l'équation différentielle:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \left( \frac{1}{4} - \frac{h}{z} + \frac{m-m^2}{z^2} \right) u = 0,$$

qui se ramène par un changement de variable aux équations hypergéométriques confluentes étudiées par Whittaker, et de sa solution  $F_{h,m}(z)$ . Si, en particulier,  $h$  est nul, elle se ramène aux équations de Bessel. Les résultats obtenus sont les suivants: Pour que l'équation  $z^{-m}F_{0,m}(z) = 0$  ait des racines imaginaires, il faut et il suffit que  $2m$  soit  $< -1$  et ne soit pas un entier impair. Si l'on a  $|m+p| < \frac{1}{2}$ ,  $p$  étant un entier positif, cette équation a  $2p$  racines imaginaires, et non davantage. Si  $h$  n'est pas nul, pour que l'équation  $z^{-m}F_{h,m}(z) = 0$  ait des racines imaginaires, il faut et il suffit que  $2m$  soit  $< -1$  et ne soit pas entier. Si l'on a  $0 < |m+p| < \frac{1}{2}$ ,  $p$  étant un entier positif, cette équation a  $2p$  racines imaginaires, et non davantage. Que  $h$  soit ou ne soit pas nul, les arguments de deux racines imaginaires distinctes sont toujours distincts. Les résultats correspondants pour les fonctions de Bessel dans le livre de R. Courant et D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik* (2<sup>e</sup> édition, Berlin 1931; ce Zbl. 1, 5), spécialement tome 1, chap. VII, § 2, n<sup>o</sup> 8 sont inexacts. *M. J. O. Strutt*.

**Varma, R. S.:** On Humbert functions. *Ann. of Math.*, II. s. 42, 429—436 (1941).  
Die Humbertfunktionen werden vom Verf. durch die Formel:

$$J_{m,n}(x) = \frac{(x/3)^{m+n}}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)} {}_0F_2\left(m+1, n+1; -\frac{x^3}{27}\right)$$

definiert. Verf. betrachtet in erster Linie die Konvergenz der mit diesen Funktionen gebildeten unendlichen Reihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} J_{m,n}(x) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_{ln+k,n} J_{ln+k,n}(x).$$

Hierbei geht er von den asymptotischen Formeln für die genannten Funktionen aus und erhält notwendige und hinreichende Bedingungen für die genannte Konvergenz. Als Beispiele betrachtet er einige von P. Humbert bereits angeschriebene Reihen. Hierauf berechnet Verf. die Laplacesche Transformierte (oder, wie er sagt, das operatorische Bild) der Humbertfunktionen. Im nächsten Abschnitt summiert er eine unendliche Reihe, deren Glieder Produkte von Humbertfunktionen und Weberfunktionen sind, und erhält als Summe einen Ausdruck, der als Faktor die Kelvinsche bei-Funktion enthält. Im letzten Abschnitt betrachtet er den Konvergenzbereich einer Reihe, deren Glieder Produkte von Humbertfunktionen und Neumannschen Polynomen enthalten.

*M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

**MacRobert, T. M.:** Some formulae for the *E*-function. *Philos. Mag.*, VII. s. 31, 254—260 (1941).

Verf. befaßt sich mit folgender Funktion:

$$\begin{aligned} E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; x) &= \frac{\Gamma(\alpha_{q+1})}{\Gamma(\varrho_1 - \alpha_1) \Gamma(\varrho_2 - \alpha_2) \cdots \Gamma(\varrho_q - \alpha_q)} \\ &\times \prod_{\mu=1}^q \int_0^{\infty} \lambda_{\mu}^{e_{\mu} - \alpha_{\mu} - 1} (1 - \lambda_{\mu})^{-e_{\mu}} d\lambda_{\mu} \prod_{\nu=2}^{p-q-1} \int_0^{\infty} e^{-\lambda_q + \nu} \lambda_{q+\nu}^{\alpha_{q+\nu} - 1} d\lambda_{q+\nu} \\ &\times \int_0^{\infty} e^{-\lambda_p} \lambda_p^{\alpha_p - 1} \left\{ 1 + \frac{\lambda_{q+2} \lambda_{q+3} \cdots \lambda_p}{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \cdots (1 + \lambda_q)x} \right\}^{-\alpha_{q+1}} d\lambda_p. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Definition lassen z. B. sich folgende Formeln beweisen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\zeta} \zeta^{-e_q+1} E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; \zeta x) d\zeta &= E(p; \alpha_r; q+1; \varrho_s; x); \\ \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \lambda^{\alpha_p+1-1} E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; \frac{x}{\lambda}) d\lambda &= E(p+1; \alpha_r; q; \varrho_s; x). \end{aligned}$$



Nach Ableitung weiterer ähnlicher Integralformeln wendet sich Verf. Spezialfällen zu, in denen sich die Integrale auf solche vereinfachen, deren Integranden Besselsche Funktionen, Legendresche Funktionen und konfluente hypergeometrische Funktionen enthalten. Eine Anzahl dieser Formeln wurde bereits früher von anderen Autoren abgeleitet. Endlich wendet Verf. sich den Rekursionsformeln für die  $E$ -Funktionen zu und leitet z. B. ab:

$$\begin{aligned} E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; x) &= \frac{1}{\alpha_1} E(p; \alpha_1 + 1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; q; \varrho_s; x) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_1 x} E(p; \alpha_r + 1; q; \varrho_s + 1; x); \\ E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; x) &= \frac{1}{\varrho_1 - 1} E(p; \alpha_r; \varrho_1 - 1, \varrho_2, \dots, \varrho_q; x) \\ &\quad + \frac{1}{(\varrho_1 - 1)x} E(p; \alpha_r + 1; q; \varrho_s + 1; x). \end{aligned}$$

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

### Funktionentheorie:

● Phillips, E. G.: *Functions of a complex variable; with applications*. New York: Interscience Publ. 1941. 140 pag. \$ 1.50.

Giorgi, G.: *Punti di vista moderni nello studio delle funzioni analitiche*. Rend. Semin. mat. fis. Milano 14, 81—88 (1940).

Verf. wiederholt im wesentlichen seine Darlegungen auf dem Mathematikerkongreß Bologna [Atti Congresso Bologna 3, 205—213 (1930)], die einen synthetischen Aufbau der Funktionentheorie anstreben: Von rationalen und algebraischen Funktionen aus werden allgemeinere Funktionenklassen durch Grenzübergang erfaßt. — Einleitend weist er darauf hin, daß Cauchys Stellung zum Unendlichen in der Analysis von theologischen Strömungen seiner Zeit beeinflußt sei („solamente Iddio è infinito“); auch nach Überwindung eines Monopols der Theologie auf das Wort „Unendlich“ sei die Cauchysche Rücksichtnahme in der Analysis bis heute unbesiegt.

Ullrich (Gießen).

Pompeiu, D.: *Les définitions de l'holomorphie et le prolongement analytique*. Mathematica, Timişvara 18, 112—124 (1942).

Plauderei über die verschiedenen Definitionen der Holomorphie; es wird angedeutet, wie zweckmäßig es sei, sie nebeneinander zu benutzen und wie elegant, das nicht zu tun. Verf. rät zur Versöhnlichkeit: jede habe ihr Gutes.

Ullrich (Gießen).

Macintyre, A. J., and W. H. J. Fuchs: *Inequalities for the logarithmic derivatives of a polynomial*. J. London Math. Soc. 15, 162—168 (1940).

S'appuyant sur un théorème de H. Cartan [Ann. Ecole norm., III. s. 45, 255—346 (1928)] qu'ils présentent sous une forme nouvelle, les aut. donnent une borne de la

somme  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{|z - a_k|^m}$  à l'extérieur de certains cercles.  $H > 0$  et  $\alpha > 0$  étant

donnés, on exclut  $n$  cercles au plus, convenablement choisis, de rayons  $h_k$  tels que  $\sum h_k^{1/\alpha} \leq (2H)^{1/\alpha}$ . A l'extérieur de ces cercles, la somme considérée (où  $m$  est un entier positif) est inférieure à: a)  $n(1 + \log n)/H$  si  $\alpha = 1$ ,  $m = 1$ ; b)  $B_m(n/H)^m$  si  $\alpha = 1$ ,  $m > 1$ ; c)  $An/H$  si  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $m = 1$ ; d)  $n(1 + \log n)/H^2$  si  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $m = 2$ ; e)  $A_m n^{m/2} H^{-m}$  si  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $m > 2$ . Ces bornes sont les meilleures en ce qui concerne l'ordre de grandeur par rapport à  $n$  et  $H$  dans les cas b), c), e). Dans les cas a) et d), les aut. pensent que  $\log n$  doit pouvoir être remplacé par une constante à condition

de remplacer la somme par  $\left| \sum \frac{1}{z - a_k} \right|$ . Dans cet ordre d'idées, ils montrent que: si  $L$  est une droite arbitraire du plan, quels que soient les  $a_k$  et  $z$  sur  $L$ , on a

$\left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k} \right| < H$  où  $H$  est donné positif, sauf au plus pour un ensemble de valeurs  $z$  de mesure moindre que  $2en/H$ .

G. Valiron (Paris).

**Schmidli, Salomon:** Über gewisse Interpolationsreihen. Zürich: Diss. 1942. 71 S.

Verf. behandelt einige klassische und neuere Interpolationsreihen nach einer einheitlichen, und zwar funktionentheoretischen Methode. Als wesentliches Hilfsmittel dient ihm der Zusammenhang zwischen einer ganzen Funktion vom Normaltypus der Ordnung Eins und ihrer Borelschen Transformierten. Vgl. hierzu G. Pólya (Über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen [Math. Z. **29**, 550—627 (1929)]) und auch A. Gelfond [Rec. math. Moscou, N. s. **4**, 115—147 (1938); dies. Zbl. **20**, 311]. — Zunächst betrachtet Verf. die Abelsche Reihe

$$(1) \quad F(z) = F(0) + \frac{z}{1!} F'(1) + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{z(z-\nu)^{\nu-1}}{\nu!} F^{(\nu)}(\nu)$$

und beweist, daß sich  $F(z)$  nur dann in eine Reihe (1) entwickeln läßt, wenn  $F(z)$  eine ganze Funktion ist, welche der Bedingung  $F(Re^{i\Phi}) = o(R^{2\epsilon b(\Phi)R})$  (2) genügt, wobei  $b(\Phi)$  die Stützfunktion desjenigen konvexen Bereiches bedeutet, welcher aus allen Punkten  $s$  besteht, für die  $|se^{s+1}| \leq 1$  und  $|s| \leq 1$  ist. Ferner ist die ganze Funktion  $F(z)$  sicher dann in eine Reihe (1) entwickelbar, wenn  $F(Re^{i\Phi}) = O(R^{-1-\epsilon b(\Phi)R})$  mit  $\epsilon > 0$  (3) gilt. (2) und (3) sollen in  $\Phi$  für  $R \rightarrow \infty$  gleichmäßig zutreffen. Ist (3) erfüllt, so konvergiert die zur ganzen Funktion  $F(z)$  gehörige Reihe (1) sogar absolut (und gleichmäßig in jedem endlichen Bereich der  $z$ -Ebene). Schließlich gibt Verf. eine sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung für die Entwickelbarkeit von  $F(z)$  in eine Reihe (1) an, welche in jedem endlichen Bereiche der  $z$ -Ebene wie eine geometrische Reihe bzw. wie eine geometrische Reihe mit einem Quotienten  $< q < 1$  konvergiert. (2) und (3) sind schärfer als die besten bisher bekannten Bedingungen von W. Gontcharoff [Rec. math. Moscou **42**, 473—483 (1935); dies. Zbl. **13**, 161]. — Für die Reihe von Stirling

$$(4) \quad F(z) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(2n)!} \prod_{\nu=0}^{n-1} (z^2 - \nu^2) \Delta^{2n} F(-n) + \frac{z}{(2n-1)!} \prod_{\nu=1}^{n-1} (z^2 - \nu^2) \frac{\Delta^{2n-2} [F(-n+2) - F(-n)]}{2} \right)$$

behandelt Verf. die gleichen Fragestellungen wie für die Abelsche Reihenentwicklung. Die sich ergebenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit der Entwicklung (4) sind jedoch nicht so scharf wie die von N. E. Nörlund (Differenzenrechnung, S. 208—219, Berlin 1924) gefundenen. — Im letzten Abschnitt seiner Arbeit betrachtet Verf. folgendes von G. Pólya eingeführte Interpolationsproblem: Gegeben seien die Folge komplexer Zahlen  $\{a_\nu\}$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) und die Folge nicht negativer ganzer Zahlen  $\{\alpha_\nu\}$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) mit  $\alpha_\nu \leq \alpha_{\nu+1}$ . Ist  $\alpha_k = \alpha_l$  und  $k < l$ , so soll  $\alpha_k < \alpha_l$  sein. Ferner existiere eine ganze positive Zahl  $p$ , für welche  $a_{\nu+p} = a_\nu$  und  $\alpha_{\nu+p} = \alpha_\nu$  ist. Schließlich sollen  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$  so gewählt sein, daß jedes Polynom  $P(z)$  vom Grade  $\leq p-1$ , welches den  $p$  Gleichungen  $P^{(\alpha_\mu)}(a_\mu) = 0$ ;  $\mu = 0, 1, 2, \dots, p-1$  genügt, identisch verschwindet. Wann gilt nun

die Entwicklung  $F(z) = \sum_{i=0}^{p-1} \left( \sum_{m=0}^{\infty} F^{(m p + \alpha_i)}(a_i) P_{m p + i}(z) \right)$  (5), wobei die  $P_{m p + i}(z)$ ;

$i = 0, 1, \dots, p-1$  und  $m = 0, 1, 2, \dots$  noch näher zu bestimmende Polynome bedeuten? Verf. gibt hinreichende Bedingungen dafür an, daß sich  $F(z)$  in eine Reihe (5) entwickeln läßt, bei welcher die  $p$  Teilreihen absolut (und gleichmäßig in jedem endlichen Bereich der  $z$ -Ebene) konvergieren. U. a. untersucht Verf. noch genauer den Spezialfall  $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0; a_0 = 1, a_1 = 0$  und  $p = 2$ , welcher auf die Lidstonesche

Reihe  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(2n)}(1) A_n(z) + \sum_{n=0}^{\infty} F^{(2n)}(0) A_n(1-z)$  (6) führt, worin die  $A_n(z)$

gewisse Polynome sind. Für die Entwickelbarkeit von  $F(z)$  in eine Reihe (6) erhält Verf. als notwendige Bedingung, daß  $F(z)$  eine ganze Funktion ist, für welche die



Abschätzung  $|F(z)| < K(\varepsilon) e^{(\pi + \varepsilon)|z|}$  ( $K(\varepsilon) > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ) gilt, während sich die Gültigkeit der Abschätzung  $|F(z)| < A|z|^{-\frac{1}{2}} - z e^{\pi|z|}$  ( $A > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ) (7) für die ganze Funktion  $F(z)$  als hinreichende Bedingung herausstellt. Die Bedingung (7) ist schärfer als die von J. M. Whittaker [Proc. London Math. Soc., II. s. 36, 451—469 (1933); dies. Zbl. 8, 169] angegebene.

Lammel (Prag).

**Onofri, Luigi:** Contributo alla teoria delle funzioni univalenti. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 4, 217—224 (1942).

Verf. gibt hinreichende Bedingungen für schlichte, sternige bzw. konvexe Abbildung des Einheitskreises an Hand von Voraussetzungen über die Koeffizientenfolge  $a_n$  der Potenzreihe  $w = f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ . So bildet  $f(z)$  den Einheitskreis regulär, schlicht und sternig (in bezug auf  $O$ ) ab, wenn die Folge  $na_n$  positiv, beschränkt, nie konkav ist; auf dem Bildrand bleibt  $|w| \geq \frac{2}{3}$ . — Die Abbildung wird sogar konvex, wenn die nie konkave Folge  $n^2 a_n$  größer gleich 0 und beschränkt, also kleiner gleich 1 bleibt; dann ist auf dem Bildrand  $|w| \geq \frac{2}{3} \frac{9}{8}$ . — Der Beweis stützt sich auf Aussagen von Fejér über Sinus- bzw. Kosinusreihen mit positiver Summe, wie sie vom Verf. schon früher funktionentheoretisch ausgenutzt wurden [Mem. Accad. Ital. 6, 1267—1291 (1935); dies. Zbl. 13, 271]. Als Hilfssatz dient: Ist  $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$  reell regulär in  $|z| < 1$  und  $J\{zf'(z)\} > 0$  im oberen Halbkreis, so ist  $f(z)$  schlicht im Einheitskreis. Für diese Klasse schlichter Abbildungen ist übrigens  $|a_n| \leq 1$ , und die Koebesche Konstante kann durch  $\frac{1}{2}$  ersetzt werden.

Ullrich (Gießen).

**Monna, A. F.:** Sur quelques propriétés d'une classe de surfaces minima. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 45, 681—686 (1942).

In den letzten Monaten ist eine Reihe neuartiger Anwendungen des Koebeschen Verzerrungssatzes gefunden worden, welche Aussagen über das Randverhalten schlichter Abbildungen liefern (Denjoy und Wolff, dies. Zbl. 25, 259—260; 26, 218; 27, 57). Verf. bemerkt, daß die Methoden von Wolff auch auf „schlichte“ Minimalflächen anwendbar sind, welche von den Realteilen dreier schlichter Funktionen erzeugt werden  $X_\nu = \Re f_\nu(z)$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ). Als Seitenstück zu den Sätzen über schlichte Abbildungen selbst ergibt sich z. B. für Minimalflächen als Bilder des Einheitskreises  $\mathbb{E}$

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|) \cdot E(z)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

wo die aus der Differentialgeometrie geläufige Größe

$$E(z) = \sum_1^3 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \Re f_\nu(z) \right]^2 \quad \text{hier gleich} \quad \frac{1}{2} \sum_1^3 |f'_\nu(z)|^2$$

an Stelle von  $|f'(z)|^2$  in den Wolffschen Aussagen tritt. Auch für die Längen von Kurven, die in den Rand münden (als Bilder von Kurven in  $\mathbb{E}$  mit dieser Eigenschaft) gelten entsprechende Sätze.

Ullrich (Gießen).

**Bergman, Stefan:** On a generalized Green's function and certain of its applications. Bull. Amer. Math. Soc. 47, 651—661 (1941).

L'intégrale double de Poisson étendue à l'arête d'un dicylindre  $|z_1| \leq r_1$ ,  $|z_2| \leq r_2$ ,  $z_1 = x_1 + i y_1$ ,  $z_2 = x_2 + i y_2$ , donne l'expression d'une fonction harmonique des couples  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  se réduisant sur l'arête à une fonction continue donnée. Plus généralement l'a. considère un domaine  $\mathfrak{M}$  du type déjà envisagé par lui (voir ce Zbl. 20, 379), défini par ses sections  $z_1 \in B(z_2)$ ;  $B(z_2)$  est l'intérieur d'une courbe  $z_1 = h(z_2, \lambda)$ ,  $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ , à laquelle il impose des conditions de déformation assez régulière quand  $z_2$  varie ( $|z_2| < 1$ ). La frontière d'un  $\mathfrak{M}$  est formée de deux hypersurfaces analytiques dont l'intersection  $F^2$  constitue une „surface remarquable“. L'a. donne l'expression dans  $\mathfrak{M}$  d'une fonction  $D(z_1, z_2; G; \mathfrak{M})$  harmonique de  $(x_1, y_1)$  dans  $B(z_2)$ , harmonique de  $(x_2, y_2)$  sur les variétés  $z_1 = h(z_2, \lambda)$  et se réduisant pour  $z_2 = e^{i\varphi_1}$  à une fonction donnée  $G(\varphi_2, \lambda)$  sommable sur  $F^2$ , continue de  $\varphi_2$  et de  $\lambda$ , sauf pour un nombre fini de valeurs de  $\varphi_2$ . Les fonctions

$$H(z_1, z_2) = \lim_{n=\infty} D(z_1, z_2; G_n; \mathfrak{M}) - \lim_{n=\infty} D(z_1, z_2; G'_n; \mathfrak{M})$$

sont définies à partir des fonctions  $D$ , les deux suites étant non décroissantes et uniformément convergentes dans  $\mathfrak{M}$ . La classe  $L$  est constituée dans  $\mathfrak{M}$  par les fonctions satisfaisant à certaines conditions d'intégrabilité sur  $F^2$  et de la forme

$$L(z_1, z_2) = \sum_{n=1}^{\infty} [-\log g_n(z_1, z_2) + H_n(z_1, z_2)],$$

la somme étant uniformément convergente sauf sur les variétés  $g_n = 0$ . En particulier la fonction de Green „généralisée“ de l'au., relative à la variété  $g = 0$  et à  $\mathfrak{M}$  est définie par

$$\Gamma(z_1, z_2; g; \mathfrak{M}) = -\log |g(z_1, z_2)| + D(z_1, z_2; \log |g|; \mathfrak{M})$$

où  $g = g[h(e^{i\varphi_1}, \lambda), e^{i\varphi_2}]$ ;  $\Gamma = 0$  presque partout sur la frontière de  $\mathfrak{M}$ ;  $\Gamma \geq 0$  à l'intérieur de  $\mathfrak{M}$  et sur l'une des variétés frontières. Soit  $\mathfrak{M}_r$  le sous-domaine de  $\mathfrak{M}$  obtenu pour  $|z_2| \leq r < 1$ . L'au. généralise alors le théorème de Blaschke relatif aux zéros d'une fonction  $f(z)$  bornée et obtient: étant donnée une suite  $g_n(z_1, z_2)$  de fonctions holomorphes dans  $\mathfrak{M}$ , telles que pour  $n > N(r)$   $g_n$  ne s'annule pas dans  $\mathfrak{M}_r$ , la convergence de la série  $\sum \Gamma(0, 0; g_n; \mathfrak{M})$  exprime la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction  $F(z_1, z_2)$  de classe  $L$ ,  $F(0, 0) < \infty$ , telle que pour tout  $n$   $F(z_1, z_2) + \log |g_n(z_1, z_2)|$  soit régulière dans  $\mathfrak{M}$  sur les variétés  $g_n = 0$ , sauf aux points communs à plusieurs d'entre elles.

P. Lelong (Paris).

**Lelong, Pierre:** Sur les valeurs lacunaires d'une relation à deux variables. Bull. Sci. math., II. s. **66**, 103—108 et 112—125 (1942).

$F(w, z)$  sei eine reguläre Funktion im Dyzylinder, der das topologische Produkt der endlichen  $w$ -Ebene und eines Bereiches  $\mathfrak{B}$  der  $z$ -Ebene ist.  $z_0$  heißt dann ein Lückenwert der Gleichung  $F(w, z) = 0$ , wenn  $F(w, z_0)$  für kein  $w$  verschwindet. Wie das Beispiel  $F(w, z) = e^w + e^z - 1 = 0$  zeigt, kann es eine unendliche Menge  $\mathfrak{G}(z)$  von Lückenwerten geben, ohne daß  $F$  von der Gestalt  $e^{G(w, z)}$  zu sein braucht. — Verf. untersucht  $\mathfrak{G}(z)$  unter der Voraussetzung, daß  $F(w, z)$  eine Funktion ist, deren maximales Wachstum von endlicher Ordnung in  $w$  ist (siehe auch dies. Zbl. **26**, 15). Er beweist, daß  $\mathfrak{G}(z)$  nur auf dem Rande von  $\mathfrak{B}$  Häufungspunkte haben kann. Im Falle, daß  $F(w, z)$  eine ganze Funktion ist, ist die Zahl der Punkte  $\mathfrak{G}(z)$  mit  $|z| < r$  eine Funktion von  $r$ , deren Wachstum nach oben durch eine Beziehung zum Wachstum von  $F(w, z)$  in  $z$  beschränkt bleibt.  $\mathfrak{G}(z)$  gehört zur Menge der Nullstellen einer ganzen Funktion  $f(z)$ , die ihrerseits eine Funktion von  $F(w, z)$  und ihrer Ableitungen für  $w = 0$  ist. — Schließlich wird untersucht, wie die durch  $F(w, z) = 0$  definierte Funktion  $z(w)$  sich einem Lückenwerte nähern kann, wenn  $|w|$  unbeschränkt wächst. — An älterer Literatur siehe auch G. Julia, Bull. Soc. Math. France **54**, 26—37 (1926). Behnke.

**Capelli, Pedro F.:** Sur le nombre complexe binaire. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 585—595 (1941).

L'A. risponde alcune considerazioni sulle funzioni della variabile complessa binaria  $x + \alpha y$ , di cui già in un suo precedente lavoro (questo Zbl. **22**, 367). E. Martinelli.

### Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

**Myrberg, P. J.:** Die Kapazität der singulären Menge der linearen Gruppen. Ann. Acad. Sci. Fennicae A I, Nr 10, 1—19 (1941).

Ist  $D_n$  ein von endlich vielen getrennt liegenden Kreisen begrenztes Gebiet, das den Punkt  $\infty$  im Innern enthält, so besitzt die zugehörige Greensche Funktion in der Umgebung des Poles  $z = \infty$  die Entwicklung  $\log |z| + u_n(z)$ ,  $u_n(z)$  stetig für  $z = \infty$ ,  $\gamma_n = u_n(\infty)$  endlich, reell (Robinsche Konstante von  $D_n$ ).  $C(M_n) = e^{-\gamma_n}$  heißt die Kapazität des Randes  $M_n$  von  $D_n$  (vgl. R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, S. 114, 1936; dies. Zbl. **14**, 163). Nach einer vorbereitenden Abschätzung für  $\gamma_n$  (§ 1) betrachtet Verf. in § 2 Schottkysche Gruppen  $G$  mit mindestens zwei Erzeugenden.  $G$  ist in der  $z$ -Ebene eigentlich diskontinuierlich mit Ausnahme einer



nicht abzählbaren diskreten Punktmenge  $M$ , der Menge der singulären Punkte der Gruppe. Verf. zeigt  $C(M) > 0$ , wobei es genügt, den Beweis für eine Untergruppe von  $G$  mit zwei Erzeugenden zu führen. Eine beliebige lineare Gruppe, für die  $M$  aus mindestens drei Punkten besteht, besitzt stets eine nichtzyklische Schottkysche Gruppe als Untergruppe (§ 3), so daß  $C(M) > 0$  ist; genauer zeigt Verf. sogar, daß die Gesamtheit der Punkte von  $M$  in einer beliebigen Umgebung eines beliebigen Punktes von  $M$  positive Kapazität besitzt. In § 4 handelt es sich um die Gruppe  $H$  umkehrbar eindeutiger konformer Abbildungen eines schlichten Bereiches auf sich. Der Rand hat positive Kapazität, wenn nicht  $H$  eine der leicht übersehbaren speziellen linearen Gruppen ist, die Verf. angibt. Eine weitere Anwendung behandelt in § 5 die Normalteiler  $\Gamma_0$  vom Geschlecht 0 einer Hauptkreisgruppe  $\Gamma$ . Die stets linearen Gruppen  $\Gamma_0$  und die zugehörigen (regulär verzweigten) Riemannschen Flächen  $R_0$  vom Geschlecht 0 werden in zwei Klassen eingeteilt, je nachdem der Rand des Bildbereiches von  $R_0$  bei Abbildung durch eine auf  $R_0$  einwertige Funktion verschwindende oder positive Kapazität besitzt. Z. B. gilt das letzte stets, wenn  $\Gamma$  mindestens das Geschlecht 2 hat, weil dann keine Faktorgruppe  $\Gamma/\Gamma_0$  eine der speziellen linearen Gruppen ist.

*E. Schulenberg (Berlin).*

**Myrberg, P. J.: Über den Fundamentalbereich der automorphen Funktionen.** Ann. Acad. Sci. Fennicae A I, Nr 2, 1—25 (1941).

Verf. untersucht das lineare Maß  $L$  der Eckpunkte des Fundamentalbereiches  $B$  der automorphen Funktionen zu einer Grenzkreisgruppe erster Art mit unendlich vielen Erzeugenden. Er beschränkt sich auf den Fall, daß die durch Verheften von  $B$  entstehende Riemannsche Fläche das Geschlecht 0 besitzt. Dann gibt es eine Hauptfunktion  $x = x(z)$ , die  $B$  konform auf einen schlichten Bereich  $D$  der  $x$ -Ebene abbildet. Setzt man  $D$  als einfach zusammenhängend voraus, so kann man  $D$  stets als die ganze Ebene (parabolischer Fall) oder als Einheitskreis (hyperbolischer Fall) wählen. Umgekehrt kann man von  $D$  ausgehen.  $a_1, a_2, \dots$  seien die Verzweigungspunkte in  $D$ , deren Ordnung als  $\infty$  vorausgesetzt wird, so daß ihre Urbilder auf dem Hauptkreis  $H$  liegen. Alle Randpunkte von  $D$  seien Häufungspunkte der  $a_i$ , damit  $H$  zugleich Grenzkreis ist, d. h. die Gruppe von erster Art ist. Durch Schnitte, die von den  $a_i$  zum Rand geführt werden, wird  $D$  zu einem einfach zusammenhängenden Stern. —  $L$  ist der Grenzwert des harmonischen Maßes für  $z = 0$  in bezug auf  $H$  einer Bogenmenge, die sich auf die Eckpunkte zusammenzieht (zur Def. des harmonischen Maßes vgl. R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, S. 7, 1936; dies. Zbl. 14, 163). Die Aussagen über das Verschwinden oder Nichtverschwinden von  $L$  lassen sich durch Abschätzen harmonischer Maße gewinnen, die in bezug auf  $H$  oder  $B$  oder gewisse Näherungsbereiche gebildet werden. Setzt man wieder  $z = z(x)$ , so erhält man als Funktionen von  $x$  harmonische Maße in bezug auf den Stern oder Näherungsbereiche. Auf diese Weise zeigt Verf., daß  $L$  im parabolischen Fall stets verschwindet. Im hyperbolischen Fall lassen sich Sterne mit positivem  $L$  und solche mit dem Maß 0 angeben, und zwar kann die Punktmenge  $a_1, a_2, \dots$  so gebildet werden, daß  $L$  für jeden zugehörigen Fundamentalbereich verschwindet.

*E. Schulenberg (Berlin).*

**Maass, Hans: Theorie der Poincaréschen Reihen zu den hyperbolischen Fixpunktsystemen der Hilbertschen Modulgruppe.** Math. Ann. 118, 518—543 (1942).

In zwei vorangehenden Arbeiten (dies. Zbl. 23, 223, 224) hat Verf. erstens die Theorie der Gruppen von  $n$  simultanen, linear gebrochenen Transformationen von  $n$  Veränderlichen entwickelt und zweitens gezeigt, daß die verallgemeinerten Poincaréschen Reihen zu den parabolischen Fixpunktsystemen alle automorphen Formen der Dimension  $-r < -2$  zu einem Multiplikatorsystem  $v$  vom Betrag Eins darstellen (Vollständigkeitssatz). Unter Beschränkung auf die Hilbertsche Modulgruppe untersucht Verf. jetzt Poincaréreihen zu hyperbolischen Fixpunktsystemen und zu Systemen innerer Punkte. Das Bildungsprinzip entspricht der von Petersson (dies. Zbl. 25, 46) für den Fall  $n = 1$  angegebenen einheitlichen Erzeugung von Poincaréreihen unter

Benutzung der entsprechenden modifizierten Ortsvariablen für Nichtfixpunkte. Jedoch ergeben sich mehr Möglichkeiten als für  $n = 1$ . — Ein Fixpunktsystem einer Substitution heißt, wie a. a. O. definiert wurde, hyperbolisch, sobald mindestens eine der Komponentensubstitutionen hyperbolisch ist. Schließt man parabolische Fixpunkte aus, so besitzt also eine Substitution  $t$  hyperbolische und  $n - t$  elliptische Komponenten ( $1 \leq t \leq n$ ).  $t = 0$  liefert eine Reihe zu einem Nichtfixpunkt, die also vom Typus der Petersson'schen  $\mathcal{P}$ -Reihen ist.  $t = n$  ist die Verallgemeinerung der hyperbolischen Substitution und führt zu einer Poincaréreihe vom Typus  $\mathcal{E}$ . Die Zwischenwerte von  $t$  liefern Reihen von gemischtem Typus. Die Erzeugung geschieht jedoch einheitlich für  $0 \leq t \leq n$ . — Auf die Darstellung der Entwicklungen automorpher Formen (§ 1) folgt die Bildung der Poincaréreihen und die Untersuchung ihres Verhaltens bei Transformationen und ihrer Konvergenz (§ 2). Der Konvergenzbeweis ist gegenüber dem früheren für Poincaréreihen zu parabolischen Fixpunkten gegebenen mit Hilfe eines Gedankens von Petersson sehr vereinfacht. Die Anwendung der Metrisierungstheorie (§ 3) liefert auch für die hier untersuchten Reihen den Satz über die Charakterisierung durch Orthogonalitätseigenschaften und den Vollständigkeitsatz. Die Aussagen der Sätze und die Beweisgedanken entsprechen den Sätzen für Poincaréreihen zu parabolischen Fixpunktsystemen bzw. für Poincaréreihen der drei Typen im Fall  $n = 1$ .

*E. Schulenberg* (Berlin).

**Følner, Erling:** Über Nullpunktsummen fastperiodischer Funktionen. Mat. Tidskr. B 1942, 54—62 [Dänisch].

$\mathfrak{N}$  sei die Menge der Nullpunktsummen fastperiodischer Funktionen. Die Arbeit behandelt Struktur und Erzeugung von  $\mathfrak{N}$ . Ist  $\mathfrak{G} \in \mathfrak{N}$ , so ist  $\mathfrak{G}$  abgeschlossen, aber nicht umgekehrt. Aus  $\mathfrak{G}_1 \in \mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{G}_2 \in \mathfrak{N}$  folgt  $\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2 \in \mathfrak{N}$ , und so allgemein auch für endlichviele Summanden, aber nicht mehr für abzählbar unendlichviele, selbst wenn die Summe abgeschlossen ist. Auch gilt  $\mathfrak{G}_1 \cdot \mathfrak{G}_2 \in \mathfrak{N}$  und analog sogar für abzählbar unendlichviele Faktoren. Als (eindimensionale) Grundmenge der Periode  $p > 0$  bezeichnet man eine Menge auf der Geraden, die entweder leer oder die ganze Gerade oder ein abgeschlossenes Intervall der Länge  $< p$  ist oder aus einem Punkt und den durch Addition von  $\pm np$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) daraus entstehenden Punkten besteht.  $\mathfrak{G}$  sei die Menge aller zu beliebigen positiven Perioden gehörigen Grundmengen. Bezeichnet dann  $H(\mathfrak{G})$  die Menge aller Mengen, die man als Durchschnitt höchstens abzählbar vieler Mengen erhält, die ihrerseits Summen endlichvieler Mengen aus  $\mathfrak{G}$  sind, so lautet der Hauptsatz:  $\mathfrak{N} = H(\mathfrak{G})$ . Beispiele zeigen, daß die Durchschnittsbildung allein nicht ausreicht, um aus  $\mathfrak{G}$   $\mathfrak{N}$  zu erzeugen. Übertragung auf mehrere Dimensionen.

*Harald Geppert* (Berlin).

### Gewöhnliche Differentialgleichungen:

**Lettenmeyer, F.:** Über die von einem Punkt ausgehenden Integralkurven einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. Dtsch. Math. 7, 56—74 (1942).

In dem Parallelstreifen  $a \leq x \leq b$ ,  $-\infty < y, z < +\infty$  sei  $f(x, y, z)$  stetig und erfülle die Lipschitzbedingung

$$|f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)| \leq K|y_1 - y_2| + L|z_1 - z_2|.$$

Dann geht bekanntlich bei gegebenem  $A$  von dem Punkt  $a$ ,  $A$  in jeder Richtung genau eine Integralkurve der Differentialgleichung  $y'' + f(x, y, y') = 0$  aus. Verf. beweist, daß durch jeden Punkt des Streifens  $a < x \leq b$ ,  $-\infty < y < +\infty$  genau eine Kurve dieses Kurvenbüschels geht, wenn

$$K \frac{(b-a)^2}{\pi^2} + L \frac{4(b-a)}{\pi^2} < 1$$

ist (durch Picard war bekannt, daß die Behauptung für  $K \frac{(b-a)^2}{8} + L \frac{(b-a)}{2} < 1$  zutrifft). Ist  $K \frac{4(b-a)^2}{\pi^2} + L \frac{2(b-a)}{\pi} < 1$ , so wird jede Gerade  $x = x_0$  des Streifens  $a < x \leq b$ ,  $-\infty < y < +\infty$  von genau einer Kurve des Büschels in einer beliebig



gegebenen Richtung geschnitten. Die Ergebnisse werden angewendet auf die Differentialgleichung des einfachen Pendels und auf die Duffingsche Differentialgleichung. *Kamke* (Tübingen).

**Pompeiu, D.:** De la constante arbitraire dans les opérations d'intégration. Bul. Politehn., Bucureşti 12, 235—241 (1941).

Die (elementare) Integration der Differentialgleichung  $dy = (1 + y)f(x)dx$ , wie auch anderer Diff.gl., hängt formal mit der Bestimmung derjenigen Gruppen von Transformationen  $\bar{y}(y)$  zusammen, denen gegenüber  $dy/(1 + y)$  invariant ist.

*Harald Geppert* (Berlin).

**Kamke, Willers und H. Görtler:** Ergänzungen zu: *Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*. Z. angew. Math. Mech. 22, 233—234 (1942).

Als Ergänzung zu dem in dies. Zbl. 26, 318 besprochenen Buch von Kamke werden fortlaufend Differentialgleichungen, deren explizite Lösungen bekannt sind, veröffentlicht werden. Hier eine Liste von 15 linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit Lösungen.

*Harald Geppert* (Berlin).

**Patry, Jean:** Le théorème de Fuchs et les équations linéaires à coefficients périodiques. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 24) 59, 118—122 (1942).

L'aut. considère les équations de la forme

$$\sum_0^n (e_m + f_m e^{-ix} + g_m e^{ix}) \frac{d^m u}{dx^m} = 0$$

dont il cherche une intégrale représentable par une série

$$u = \sum_0^\infty D_k e^{i(\mu + k)x} \quad \text{ou} \quad u = \sum_0^\infty D_{-k} e^{i(\mu - k)x}.$$

La convergence de ces séries est liée aux racines de l'équation

$$f_n + e_n z + g_n z^2 = 0. \quad \text{Ch. Blanc (Lausanne).}$$

**Patry, Jean:** Une méthode numérique pour résoudre les équations linéaires à coefficients périodiques. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 24) 59, 122—126 (1942).

L'aut. cherche à donner une méthode applicable lorsque la méthode indiquée ci-dessus est en défaut. Il reprend pour cela le procédé de Ince qui revient à décomposer en deux parties le système algébrique infini qui s'introduit dans les calculs. L'aut. simplifie la résolution de ce système en le ramenant à deux systèmes finis approchés. Il ne précise pas si l'équation différentielle donnée est à coefficients réels ou complexes. Le détail des démonstrations et des calculs n'est pas donné et les idées de l'aut. n'apparaissent pas toujours très clairement: ses conclusions ne nous semblent pas exactes.

*Ch. Blanc* (Lausanne).

**Boulanger, J.:** Sur l'équation différentielle du troisième ordre. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 10, 223—233 (1941).

In una precedente ricerca (questo Zbl. 21, 316) l'A. ha dimostrato che l'equazione

$$(1) \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = A(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + B(x) \frac{dy}{dx} + C(x) y,$$

con  $A''(x)$ ,  $B'(x)$ ,  $C(x)$  funzioni continue in  $(a, b)$ ,  $a < b$ , ammette al più un solo integrale soddisfacente le condizioni ai limiti

$$(2) \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = \alpha', \quad y(b) = \beta,$$

con  $\alpha, \alpha', \beta$  costanti prefissate, se in  $(a, b)$  sono soddisfatte le due condizioni

$$(3) \quad A(x) \leq 0, \quad A''(x) - B'(x) + 2C(x) \geq 0.$$

Partendo ora dalla (1) scritta sotto la forma canonica

$$\frac{d}{dx} \left[ K(x) \left\{ \frac{d^2 y}{dx^2} - B(x) y(x) \right\} \right] + K(x) \left[ \frac{dB}{dx} - A(x) B(x) - C(x) \right] y = 0,$$

l'A. prova che vale un criterio di unicità rispetto alle condizioni ai limiti (1) se  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$  soddisfanno in  $(a, b)$  simultaneamente le due condizioni

$$(4) \quad A(x) \geq 0, \quad \frac{dB}{dx} - AB - 2C \leq 0,$$

oppure la condizione

$$(5) \quad 9A'' - 18AA' - 27B' + 4A^3 + 18AB + 54C \geq 0,$$

senza che nelle (4) e (5) il segno  $=$  valga in alcun tratto di  $(a, b)$ . — L'ultima parte del lavoro è dedicata all'equazione  $y''' + \eta(x)y = 0$ , quando  $\eta(x)$  cambia di segno in  $(a, b)$ . — È poi da notare che essendo la (1) lineare, insieme ad ogni criterio di unicità rispetto alle condizioni ai limiti (2), sussiste contemporaneamente il criterio di esistenza.

Giovanni Sansone (Firenze).

### Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Gillis, Paul: Sur un théorème relatif aux formes différentielles intégrables. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **10**, 234—246 (1941).

Es sei  $\omega_p = A^{x_1 x_2 \dots x_p} dx_{x_1} dx_{x_2} \dots dx_{x_p}$  eine Differentialform  $p$ -ten Grades in den Veränderlichen  $x_1, \dots, x_n$ , deren Koeffizienten  $A^{x_1 x_2 \dots x_p}$  in dem Bereiche  $(D_n)$   $a_i \leq x_i \leq a'_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) stetig vorausgesetzt werden.  $\omega_p$  wird integrabel genannt, wenn das Integral  $\int \omega_p$  verschwindet, und zwar für jeden regulären in dem Bereiche  $D_n$

gelegenen  $p$ -dimensionalen Zykel  $\gamma_p$ . Es handelt sich um den Beweis des folgenden Satzes: Ist  $\omega_p$  integrabel, so gibt es  $\binom{n}{p}$  Funktionen  $U^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}(x_1, \dots, x_n)$  derart, daß in jedem Punkte von  $D_n$  die Gleichheiten  $U^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}_{x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_p}} = A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} \sum U^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_p} = 0$  bestehen; dabei vertritt die letztere  $\binom{n}{p+1}$  Gleichheiten, indem die  $\beta_1, \dots, \beta_p$  je einer festen Kombination der Zahlen  $1, \dots, n$  zur  $(p+1)$ -ten Klasse entnommen sind und das Summenzeichen sich auf alle entsprechenden Kombinationen  $\beta_1, \dots, \beta_p$   $p$ -ter Klasse bezieht. Im Falle eines ungeraden  $p$  sind die Funktionen  $U^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_p}$  mit alternierenden Zeichen  $+$  und  $-$  zu versehen.

O. Borůvka (Brünn).

Janet, Maurice: Sur les formules fondamentales de la théorie des groupes continus finis et de la méthode du repère mobile. Ann. École norm., III. s. **59**, 165—186 (1942).

Es handelt sich um eine eingehendere Behandlung und Ergänzung einiger Ergebnisse, die Verf. bereits an früherer Stelle veröffentlicht hat [vgl. M. Janet, C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 424—425 (1941); dies. Zbl. **25**, 53] mit der Absicht, die Cartánsche Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen eingehender zu begründen und auszubauen. — Zur Bestimmung der Komponenten  $(\omega)$  und  $(\tilde{\omega})$  des begleitenden  $n$ -Beins der Cartanschen Theorie endlicher kontinuierlicher Gruppen gibt die Identität  $f_i(x', b) = f_i(x, c)$  in den  $n$  Veränderlichen  $x$ , d. h.  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , bzw. Parametern  $a$ , d. h.  $a_1, a_2, \dots, a_\rho$ , und  $b$ , d. h.  $b_1, b_2, \dots, b_\rho$ , die Ausgangsrelationen. In ihr sind die  $x'_k$  als Funktionen  $f_k(x, a)$  und die Parameter  $c_\mu$  als Funktionen  $\varphi_\mu(a; b)$  gegeben, wie sie aus den Gleichungen der  $\rho$ -parametrigen Transformationsgruppe  $S_a [(x) \rightarrow (x')]$  und den die Transformationen  $x''_i = f_i[f_1(x, a), f_2(x, a), \dots, f_n(x, a); b_1, b_2, \dots, b_\rho]$  begleitenden Transformationen  $(S_c = S_b S_a)$ ,  $c_\lambda = \varphi_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_\rho; b_1, b_2, \dots, b_\rho) \equiv \varphi_\lambda(a; b)$  hervorgehen. Sind insbesondere die Parameter  $b$  identisch mit den Parametern  $\alpha$  der inversen Transformation  $S_\alpha = S_a^{-1}$ , so ergeben sich für  $c$  die speziellen Parameter  $j_1, j_2, \dots, j_\rho$  der identischen Transformation  $S_j$ . Die Komponenten  $(\omega)$  bzw.  $(\tilde{\omega})$  werden jetzt durch die Relationen

$$u_\mu = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_\lambda}(j, l) \omega_\lambda(l, u) \quad \text{bzw.} \quad u_\mu = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_\lambda}(l, j) \tilde{\omega}_\lambda(l, u)$$

definiert, womit sich für die  $\alpha$  und  $a$  (bei festbleibenden  $x'$ ) bzw. für die  $x'$  und  $a$  (bei



festbleibenden  $x$ ) die beiden Pfaffschen Systeme

$$dx_k + \frac{\partial f_k}{\partial a_\lambda}(x, j) \omega_\lambda(a, da) = 0 \quad \text{bzw.} \quad dx'_i - \frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(x', j) \tilde{\omega}_\lambda(a, da) = 0$$

ergeben. In gleicher Weise behandelt Verf. weiterhin die den bisherigen Betrachtungen parallel gehenden Gleichungen der (ersten und zweiten) Parametergruppe und erhält die Pfaffschen Gleichungen

$$dc_\lambda = \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial a_\mu}(a, b) \left[ da_\mu + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_\sigma}(a, j) \omega_\sigma(b, db) \right], \quad dc_\lambda - \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial b_\sigma}(c, j) \tilde{\omega}_\sigma(b, db) = \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial a_\mu}(a, b) da_\mu,$$

bzw.

$$dc_\lambda = \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial b_\mu}(a, b) \left[ db_\mu + \frac{\partial \varphi}{\partial a_\sigma}(j, b) \tilde{\omega}_\sigma(a, da) \right], \quad dc_\lambda - \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial a_\sigma}(j, c) \omega_\sigma(a, da) = \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial b_\mu}(a, b) db_\mu.$$

Sodann behandelt Verf. die Äquivalenz der Relationen

$$dx'_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x, a) \left[ dx_k + \frac{\partial f_k}{\partial a_\lambda}(x, j) \omega_\lambda(a, da) \right]$$

und

$$dx'_i - \frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(x', j) \tilde{\omega}_\lambda(a, da) = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x, a) dx_k$$

und die für die Parameter  $a, b, c$  bestehende Fundamentalrelation:

$$(*) \quad dc_\lambda = \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial a_\sigma}(j, c) \omega_\sigma(a, da) + \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial b_\sigma}(c, j) \tilde{\omega}_\sigma(b, db),$$

die sich, je nachdem die  $b$  oder die  $a$  mit den  $j$  identifiziert werden, auf die Definitionsformeln für die  $\omega$  bzw.  $\tilde{\omega}$  reduzieren. Werden jetzt zwischen den Parametern  $a$  und  $c$  Beziehungen angesetzt, bei welchen die Parameter  $b$  konstant bleiben, so bestehen für die Ausdrücke  $\omega_\sigma(c, dc) - \omega_\sigma(a, da)$  die Relationen

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_\sigma}(j, c) [\omega_\sigma(c, dc) - \omega_\sigma(a, da)] = 0$$

und analog

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_\sigma}(c, j) [\tilde{\omega}_\sigma(c, dc) - \tilde{\omega}_\sigma(b, db)] = 0$$

für Beziehungen zwischen den Parametern  $b$  und  $c$ , bei welchen die Parameter  $a$  konstant bleiben. Mit anderen Worten: die Komponenten  $\omega$  sind Invarianten der ersten Parametergruppe, die Komponenten  $\tilde{\omega}$  solche der zweiten Parametergruppe. — Die entwickelten Methoden gestatten es nun Verf., die Unterschiede der Lieschen und Cartanschen Theorie zu verdeutlichen. So ergibt sich z. B. für die erste Parametergruppe [welche die Invarianz der  $\omega$  nach sich zieht:  $\omega_\mu(c) - \omega_\mu(a) = 0$ ] nach der Lieschen Theorie das in den Differentialen der  $c$  und  $b$  symmetrische System  $\tilde{\omega}_\mu(c) - \tilde{\omega}_\mu(b) = 0$  und analog für die zweite Parametergruppe [welche die Invarianz der  $\tilde{\omega}$  nach sich zieht:  $\tilde{\omega}_\mu(c) - \tilde{\omega}_\mu(b) = 0$ ] das in den Differentialen der  $c$  und  $a$  symmetrische System  $\omega_\mu(c) - \omega_\mu(a) = 0$ , wohingegen die Cartanschen Systeme für beide Parametergruppen identisch ausfallen:  $\omega_\mu(b) + \tilde{\omega}_\mu(a) = 0$ . — Zur Illustration der gewonnenen Ergebnisse behandelt Verf. die lineare Gruppe  $x' = a_1 x + a_2$  ( $a_1 \neq 0$ ) (in einer Variablen) und die Gruppe aller Verschiebungen des Raumes. — Zum Schluß behandelt Verf. die Cartanschen Strukturgleichungen, die sich aus der Fundamentalrelation (\*) unmittelbar ergeben. Für das erste der beiden angeführten Beispiele lauten diese Strukturgleichungen einfach:  $\omega'_1 = 0$ ,  $\tilde{\omega}'_1 = 0$ ;  $\omega'_2 = \omega_2 \omega_1$ ,  $\tilde{\omega}'_2 = -\tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_1$ ,  
 $(\omega'(x, dx, \delta x) = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}(dx_i \delta x_k - \delta x_i dx_k)$ , wenn  $\omega(x, dx) = X_i dx_i$ ).

M. Pinl (Augsburg).

**Mambriani, Antonio:** La derivazione parziale d'ordine qualunque e la risoluzione dell'equazione di Euler e Poisson. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 11, 79—97 (1942).

L'aut. applique la notion de dérivée (partielle) d'ordre quelconque à l'intégration de l'équation classique d'Euler et Poisson:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\alpha}{x-y} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\beta}{x-y} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (*)$$

en reprenant certains théorèmes établis précédemment (voir ce Zbl. 24, 35). En écrivant  $D_x^\alpha f$  pour la dérivée partielle d'ordre  $\alpha$  de  $f$  par rapport à  $x$ , on a

$$(x-y) \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha f = D_x^\alpha [(x-y) D_x^{1-\alpha} f]$$

ce qui permet d'écrire, à la place de (\*), l'équation

$$D_x^\alpha D_y^\beta (x-y) D_y^{1-\beta} D_x^{1-\alpha} z = 0;$$

la solution formelle est alors  $z = D_x^{\alpha-1} D_y^{\beta-1} (x-y)^{-1} D_y^{-\beta} D_x^{-\alpha} 0$ ; en effectuant les opérations indiquées, l'auteur retrouve très simplement les résultats généralement connus sur (\*), pour  $\alpha$  et  $\beta$  quelconques. La démonstration de la généralité de la solution est esquissée.

Ch. Blanc (Lausanne).

Churchill, R. V.: A heat conduction problem introduced by C. J. Tranter. Philos. Mag., VII. s. 31, 81—87 (1941).

Mittels der Laplacetransformation konstruiert Verf. die gleichzeitig als eindeutig nachgewiesene Lösung des folgenden Wärmeleitungsproblems, das (wenn auch in nicht ganz korrekter Weise) bereits von Tranter (dies. Zbl. 23, 41) behandelt worden ist: In jedem Zeitpunkt  $t > 0$  und in jedem Punkte des Halbraumes  $x > 0$ , der aus einer Schicht  $0 < x < a$  mit gleichförmiger Anfangstemperatur gleich  $A$  und aus dem Halbraum  $x > a$  mit der Anfangstemperatur 0 besteht, ist, falls die Ebene  $x = 0$  als wärmeundurchlässig angenommen wird, die Temperatur zu bestimmen. Sie wird durch eine Reihe dargestellt, die insbesondere für kleine Werte der Zeit  $t$  rasch konvergiert und sich daher zur numerischen Berechnung eignet.

Dario Graffi.

Carslaw, H. S., and J. C. Jaeger: The determination of Green's function for line sources for the equation of conduction of heat in cylindrical coordinates by the Laplace transformation. Philos. Mag., VII. s. 31, 204—208 (1941).

In der  $(x, y)$ -Ebene Polarkoordinaten  $r, \theta$  benutzend, ziehen die Verff. folgende Raumgebiete  $\mathcal{G}$  in Betracht:

$$(1) \quad 0 \leq r < a, \quad (2) \quad a < r, \quad (3) \quad a < r < b, \quad (4) \quad 0 < \theta < \theta_0, \\ (5), (6), (7): (4) \text{ mit den Zusätzen } (1), (2), (3).$$

Sie geben mit Hilfe der Laplaceschen Abbildung die Greensche Funktion der genannten  $\mathcal{G}$  an, d. h. die Temperatur  $v$  im Punkte  $P(r, \theta)$  zur Zeit  $t$ , die von einer im Augenblicke  $t = 0$  am Punkte  $P'(r', \theta')$  wirksamen linienhaften, zur  $z$ -Achse parallelen Quelle von der Stärke 1 herrührt, wenn  $\mathcal{G}$  sich zu dieser Zeit auf der Temperatur 0 befindet und die Oberfläche von  $\mathcal{G}$  auf 0 gehalten wird. Sie finden z. B. im Falle (1), wenn  $\kappa$  die Leitfähigkeit bedeutet,

$$v = \frac{1}{\pi a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \exp(-\kappa \alpha^2 t) \frac{J_n(\alpha r) J_n(\alpha r')}{[J'_n(\alpha a)]^2} \cos n(\theta - \theta'),$$

wo  $\alpha$  die positiven Wurzeln der Gleichung  $J_n(\alpha a) = 0$  sind. Im Falle (4) ist mit  $s = n\pi\theta_0^{-1}$

$$v = 2\theta_0^{-1} \sum_s \sin s \theta \sin s \theta' \int_0^\infty \alpha \exp(-\kappa \alpha^2 t) J_s(\alpha r') J_s(\alpha r) d\alpha.$$

Koschmieder (Graz).

Bremekamp, H.: Sur l'unicité des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du quatrième ordre. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 45, 546—552 (1942).

Es wird gefragt, wann eine die Randbedingung  $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$  oder  $u = \Delta u = 0$  erfüllende Lösung  $u(x, y)$  der Gleichung  $\alpha \Delta \Delta u + 2\beta \Delta u + \gamma u = 0$  in einem ebenen Gebiete identisch verschwinden muß. Es wird bewiesen, daß dies z. B. der Fall ist, wenn  $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ , oder  $\alpha\gamma - \beta^2 = 0$ ,  $\alpha\beta < 0$  oder, bei hinreichend kleinen Gebieten, wenn  $\alpha\gamma - \beta^2 < 0$  ist.

G. Cimmino (Bologna).



**Reade, Maxwell, and E. F. Beckenbach:** An integral analogue of Laplace's equation. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 633—640 (1941).

Sind  $u = s(\tau)$ ,  $v = t(\tau)$  und  $u = \xi(\mu)$ ,  $v = \eta(\mu)$ , für  $0 \leq \tau \leq 1$ ,  $0 \leq \mu \leq 1$  zwei rektifizierbare, geschlossene Jordankurven der  $uv$ -Ebene und ist der Punkt  $u = s(\tau) + \xi(\mu)$ ,  $v = t(\tau) + \eta(\mu)$  stets in einem gegebenen, beschränkten, einfach zusammenhängenden Gebiete  $D$  enthalten, so gilt für jede in  $D$  harmonische Funktion  $x(u, v)$  die Integralgleichung

$$(1) \quad \int_0^1 \int_0^1 x\{s(\tau) + \xi(\mu), t(\tau) + \eta(\mu)\} \{\xi'(\mu) - i\eta'(\mu)\} \{s'(\tau) + it'(\tau)\} d\mu d\tau = 0.$$

Eine stetige reelle Funktion  $x(u, v)$ , welche die Integralgleichung (1) für jedes den eben ausgesprochenen Bedingungen unterworfenen Kurvenpaar befriedigt, ist umgekehrt notwendig in  $D$  harmonisch. [Um diesen Schluß ziehen zu können, genügt es sogar vorauszusetzen, daß in (1) der reelle Teil des linken Gliedes (der Imaginärteil ist ja für jede stetige Funktion  $x(u, v)$  gleich Null), für den Fall, daß die beiden Kurven Kreise mit den Radien  $r$  und  $kr$  sind ( $k > 0$ ), eine Funktion  $F(r)$  von  $r$  wird, für die  $\lim_{r \rightarrow 0} F(r)/r^k = 0$  ist.] G. Cimmino (Bologna).

**Jacob, Caius:** Sur un problème au contour de la théorie des marées. Mathematica, Timişvara **18**, 151—158 (1942).

Verf. behandelt das folgende Randwertproblem: In der  $(x, y)$ -Ebene sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $\Omega$  durch eine analytische Kurve  $C$  begrenzt. Es soll eine komplexe Funktion  $F(x, y) = U_1(x, y) + iU_2(x, y)$  derart bestimmt werden, daß die Randbedingung

$$\frac{dF}{dn} + iA \frac{dF}{ds} = g(s)$$

auf  $C$  erfüllt sei. Dabei bedeuten  $U_1, U_2$  in  $\Omega$  reguläre harmonische Funktionen, deren erste partielle Ableitungen in  $\Omega + C$  stetig sind,  $g(s) = g_1(s) + ig_2(s)$  eine auf  $C$  erklärte komplexe Funktion, deren Komponenten bezüglich der Bogenlänge  $s$  Hölder'schen Bedingungen genügen,  $A$  eine Konstante. — Diese Aufgabe liegt der Bestimmung der Eigenschwingungen einer schweren Flüssigkeit in einem Gefäß konstanter Tiefe, das gleichförmig um seine Achse rotiert, zugrunde und tritt ebenfalls beim Studium der Weltmeere auf, wenn man annimmt, daß der Ozean eine Kugelkalotte erfüllt. Bei allgemeinerer Gestalt der Weltmeere muß jedoch  $A$  als Funktion von  $s$  angesehen werden. — Es wird gezeigt, daß die für die Lösung des Problems notwendige Bedingung  $\int_C g(s) ds = 0$ , wenn nur  $A^2 \neq 1$  ist, zugleich auch hinreichend und die Lösung

bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist.

Garten (Leipzig).

**Kappos, D. A.:** Das Dirichletsche Problem für Gebiete mit mehrfachen Randpunkten. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **11**, 43—63 (1942).

L'A. introduce, come già in maniera equivalente aveva fatto F. W. Perkins (questo Zbl. **12**, 353), la definizione di elemento di contorno per un campo (insieme aperto connesso)  $G$ , limitato o illimitato, la cui frontiera costituisca però un insieme limitato, e introduce una metrica nell'insieme  $M$  formato da tutti i punti e da tutti gli elementi di contorno di  $G$ . Nello spazio metrico (tuttavia in generale non compatto)  $M$ , che così si viene a ottenere risulta una corrispondente nozione di continuità e, in accordo con un teorema generale di H. Tietze, l'A. dimostra in semplice maniera come una funzione  $f$  continua nell'insieme  $R$  formato dai soli elementi di contorno possa sempre prolungarsi in una funzione  $u$  continua in tutto  $M$ ; la ricerca di una funzione  $u$  cosiffatta, che sia inoltre armonica in  $G$ , costituisce il problema di Dirichlet nel senso qui inteso. Per tale problema l'A. dimostra l'unicità e, servendosi, secondo l'idea di O. Perron, del metodo delle funzioni superarmoniche e subarmoniche, l'esistenza della soluzione, esistenza che risulta assicurata qualunque sia la  $f$ , tutte le volte che lo stesso avviene per il problema di Dirichlet ordinario, nel quale (pen-

sandosi il contorno di  $G$  costituito dai suoi punti, anzichè dai suoi elementi nel senso suindicato) la continuità si riferisce alla comune distanza euclidea. *G. Cimmino.*

**Monna, A. F.:** Sur une classe de fonctions sous-harmoniques et des triples de fonctions harmoniques conjuguées. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **45**, 687—689 (1942).

Sei  $f(x, y)$  im Einheitskreis nichtnegativ und beschränkt und sei  $\ln f(x, y)$  subharmonisch. Wenn auf einer Punktmenge der Kreisperipherie von positivem linearem Maß  $\lim_{r \rightarrow 0} f(x, y) = 0$  gilt, so muß  $f(x, y) \equiv 0$  sein. Erweiterungen werden skizziert. Der Satz wird auch auf sogenannte Tripel konjugierter harmonischer Funktionen angewandt. *G. af Hällström (Åbo).*

**Bolder, H.:** Sur le théorème de déformation de Koebe. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **45**, 553—558 (1942).

Im Anschluß an die Untersuchungen von Monna (dies. Zbl. **26**, 401) gibt Verf. dem Beweis für die Extremalaussage der Koebeschen Konstante eine rein potentialtheoretische Wendung; der Beweis von R. Nevanlinna (Eindeutige analytische Funktionen, Berlin 1936, S. 92ff.) wird unter Heranziehung einer passenden Massenbelegung von funktionentheoretischen Elementen befreit. Eine Kette von Hilfssätzen gestattet dabei die Übertragung in die räumliche Potentialtheorie — wodurch erneut beleuchtet wird, warum die Verzerrungsaussage selbst nicht übertragbar ist.

*Ulrich (Gießen).*

### Integralgleichungen. Integraltransformationen:

**Eichler, M.:** Konstruktion lösender Kerne für singuläre Integralgleichungen erster Art, insbesondere bei Differenzkern. Math. Z. **48**, 503—526 (1942).

Es sei

$$(1) \quad L(x, \xi) = \frac{1}{x - \xi} + c_0(x)(\gamma_0(\xi) + \Im_0(x - \xi)) \\ + c_1(x) \left( \frac{x}{1!} \gamma_0(\xi) + \gamma_1(\xi) + \Im_1(x - \xi) \right) + \dots + c_n(x) \left( \frac{x^n}{n!} \gamma_0(\xi) + \dots + \gamma_n(\xi) + \Im_n(x - \xi) \right)$$

gesetzt [ $c_\nu(x)$ ,  $\gamma_\nu(\xi)$  stetig differenzierbar,  $\Im_0(x) = \ln|x|$ ,  $\Im_n(x) = \int_0^x \Im_{n-1} dx$ ]. Verf.

stellt sich die Aufgabe, zu der Integralgleichung (2)  $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 L(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$  (das

Integral als Cauchyscher Hauptwert) zwei Funktionen  $\Lambda(\xi, t)$ ,  $N(\xi)$  zu finden, so daß

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Lambda(\xi, t) f(t) dt \text{ die Gleichung (2) und } N(\xi) \text{ die zugehörige homogene Gleichung}$$

löst; (3)  $\varphi(\xi, t) = \Lambda(\xi, t) + N(\xi) \varphi_0(t)$  ist dann ein lösender Kern von (2) [ $\varphi_0(t)$  beliebig]. — Gang der Untersuchung:  $\varphi(\xi, t)$  wird in der Form

$$(4) \quad \varphi(\xi, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{\partial^{n+1} G(x, t)}{\partial x^{n+1}} \frac{dx}{x-\xi} + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}} \frac{1}{t-\xi} + \frac{\varphi_0(t)}{\pi \sqrt{1-\xi^2}}$$

angesetzt, wobei  $\varphi_0(t)$  willkürlich und  $G(x, t)$  eine Grundlösung der Differentialgleichung

$$g^{(n+1)} + \sum_{\nu=0}^n c_\nu(x) g^{(n-\nu)} = 0 \text{ ist; } G(x, t) \text{ muß noch gewissen } (n+1) \text{ Nebenbedingungen}$$

genügen, damit (4) tatsächlich ein lösender Kern ist. Zur Bestimmung von  $G(x, t)$  macht Verf. den gleichen Ansatz, wie er zur Konstruktion der Greenschen Funktion bei homogenen Randbedingungen üblich ist. Dadurch wird das gestellte Problem auf die Berechnung gewisser  $(n+1)$  Funktionen  $r_0(t), \dots, r_n(t)$  zurückgeführt, für die sich aus den Nebenbedingungen ein System von  $(n+1)$  linearen Gleichungen von der symbolischen Gestalt (5)  $r(t)R = u(t) + \varphi_0(t)v$  ergibt ( $r(t) = (r_0, \dots, r_n)$ ,  $R$  konstante Matrix,  $u(t)$  ein mit  $t$  variabler,  $v$  ein konstanter Vektor), das, falls  $R$  eine Inverse besitzt, durch einen Vektor der Gestalt  $r(t) = l(t) + \varphi_0(t)n$  gelöst wird. So-



mit läßt sich (4) in der Gestalt (3) darstellen, wodurch  $\Lambda$  und  $N$  bestimmt sind. (Ob und wann eine Inverse existiert, wird nicht erörtert). — Verf. setzt weiter in (1)  $c_\nu = p^{\nu+1} c_\nu^*(x)$ ,  $\gamma_\nu = p^{-\nu-1} \gamma_\nu^*(\xi)$ ; dann gilt für kleine  $p$   $L(x, \xi) = L^*(x, \xi) + pO(p)$

mit  $L^*(x, \xi) = \frac{1}{x-\xi} + \sum_{\nu=0}^n c_\nu^*(x) \gamma_\nu^*(\xi)$ , und es zeigt sich, daß (4) in der Form

$\varphi(\xi, t) = \varphi^*(\xi, t) + pO(p)$  geschrieben werden kann, wobei  $\varphi^*(\xi, t)$  der zu dem „entarteten“ Kern  $L^*(x, \xi)$  gehörige lösende Kern ist. — Schließlich wird eine Klasse nur von  $(x - \xi)$  abhängiger Kerne (Differenzkerne) angegeben, die eine (evtl. auch unendliche) Entwicklung der Gestalt (1) zulassen. Für solche Kerne läßt sich (5) weitgehend explizit aufstellen. Auch wird auf ein Iterationsverfahren zur Lösung der allgemeinen Gleichung (2) hingewiesen, bei dem eine Folge von Gleichungen mit entartetem Kern  $L^*(x, \xi)$  gelöst wird. Maruhn (Berlin).

**Mambriani, Antonio, e Silvia Mambriani:** Sulle singolarità delle funzioni analitiche definite da integrali di Laplace. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 4, 235—238 (1942).

Einfacher und direkter Beweis des folgenden Satzes: Ist  $F(t)$  in der Umgebung des Nullpunktes holomorph, dann besitzt das Laplace-Integral  $f(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} F(t) dt$  auf seiner Konvergenzgeraden wenigstens einen singulären Punkt. Für einen Beweis, der sich auf die Laguerreschen Polynome stützt, vgl. auch U. Broggi, dies. Zbl. 26, 128. Giovanni Sansone (Firenze).

**Erdélyi, A.:** A class of hypergeometric transforms. J. London Math. Soc. 15, 209—212 (1940).

C. Fox (dies. Zbl. 26, 410) hat zwei Scharen funktionaler Verwandlungen  $T_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) von der Art betrachtet, daß  $T_0 = Rf(x) = x^{-1}f(x^{-1})$  ist und der passend geleitete Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  zur Fourierschen Sinus- und Kosinusverwandlung führt. Verf. zeigt, daß die  $T_n$ , durch Einführung eines stetigen Parameters  $\alpha$  zu  $T_\alpha$  verallgemeinert, sich durch Ansätze der Integration von gebrochener Ordnung darstellen lassen: Ist

$$J_{\eta, \alpha}^+ f(x) = [\Gamma(\alpha)]^{-1} x^{-\eta-\alpha} \int_0^x (x-y)^{\alpha-1} y^\eta f(y) dy,$$

$$K_{\eta, \alpha}^- f(x) = [\Gamma(\alpha)]^{-1} x^\eta \int_x^\infty (y-x)^{\alpha-1} y^{-\eta-\alpha} f(y) dy,$$

so gilt, wenn  $\operatorname{Re} \alpha > 0$  und weder  $\operatorname{Re} \nu$  noch  $\operatorname{Re}(\nu + 2\alpha)$  eine negative ungerade Zahl ist,

$$T_\alpha = (J_{\frac{1}{2}\nu, \alpha}^+)^{-1} R J_{\frac{1}{2}\nu, \alpha}^+ = J_{\frac{1}{2}\nu+\alpha, -\alpha}^+ K_{\frac{1}{2}\nu, \alpha}^- R.$$

Ausdrücklich gibt Verf. die  $T_\alpha$  für  $\operatorname{Re} \nu > -1$  und  $\alpha = n = 1, 2, 3, \dots$  an; er findet

$$T_n f = F(x) = (-1)^n R f(x) + \int_0^{x^{-1}} k(ux) f(u) du,$$

$$k(x) = \Gamma(\nu + n + 1) [\Gamma(n) \Gamma(\nu + 1)]^{-1} x^{\frac{1}{2}\nu} {}_2F_1(1 - n, \nu + n - 1; \nu + 1; x).$$

Die Kerne  $k(x)$  bilden bei festem  $\nu$  in der Folge  $n = 1, 2, 3, \dots$  eine vollständige, mit der Belegung  $1 - x$  orthogonale Gesamtheit Jacobischer Polynome.  $R$  ist die Hankelsche Verwandlung  $\mathfrak{H}$  von unendlich hoher Ordnung. Auch  $T_\alpha$  läßt sich mit Hilfe des Zeichens  $\mathfrak{H}$  ausdrücken, nämlich in der Form

$$T_\alpha = \mathfrak{H}_\nu \mathfrak{H}_{\nu+2\alpha} R. \quad \text{Koschmieder (Graz).}$$

## **Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:**

**Barricelli, Nils Aall:** Sur le prolongement à l'espace fonctionnel de la notion de volume et d'intégrale multiple. Arch. Math. og Naturvid. B 45, Nr 12, 1—24 (1942).

Par un passage purement formel „du fini à l'infini“, l'Au. propose de définir le „volume“ de l'ensemble de „toutes“ les fonctions  $x(t)$  définies dans  $a \leq t \leq b$  et

telles que  $f(t) \leq x(t) \leq g(t)$ , par l'expression  $e^{\int_a^b \log[g(t) - f(t)] dt}$ . Mais, contrairement à ce qu'il semble croire, cette expression ne peut à aucun titre être considérée comme une mesure, car elle n'est pas additive. En effet, l'ensemble  $V_0$  des fonctions définies sur  $0 \leq t \leq 1$  et telles que  $0 \leq x(t) \leq 1$  doit avoir comme volume 1; l'ensemble  $V_1$  des  $x(t)$  telles que  $0 \leq x(t) \leq \frac{1}{2}$  et l'ensemble  $V_2$  des  $x(t)$  telles que  $\frac{1}{2} \leq x(t) \leq 1$  auront tous deux comme volume  $\frac{1}{2}$ . Par ailleurs, l'ensemble  $V_3$  des fonctions  $x(t)$  appartenant à  $V_0$  et telles de plus que  $|x(t) - t| \leq \frac{1}{4}$  a un volume  $\alpha > 0$  (qu'il est facile de calculer exactement). Or, les ensembles  $V_1, V_2, V_3$  sont sans élément commun deux à deux et sont tous contenus dans  $V_0$ ; et pourtant la somme de leurs volumes est supérieure à celui de  $V_0$ . L'Au. donne aussi toute une série de généralisations, également formelles, de la notion d'intégrale à des fonctionnelles de types particuliers.

J. Dieudonné (Nancy).

● Sz. Nagy, Béla v.: *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes*. (Erg. Math. Hrsg. v. F. K. Schmidt u. E. Sperner. Bd. 5. H. 5.) Berlin: Springer 1942. IV, 80 S. RM. 9.80.

Als Hilbertscher Raum wird ein (im allgemeinen abstrakter) vollständiger komplexer euklidischer Raum  $\mathfrak{H}$  von beliebiger endlicher oder unendlicher Dimension bezeichnet. Verf. gibt eine übersichtlich gegliederte systematische Zusammenstellung der Sätze über die Darstellbarkeit linearer Transformationen (lin. Tr., auch „lin.

Operatoren“)  $A$  in  $\mathfrak{H}$  durch ein Integral bezüglich einer Spektralschar:  $A = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) dE_{\lambda}$  bzw.  $A = \int_G F(z) dK_z$  ( $E_{\lambda}$  und  $K_z$  Spektralscharen mit reellem bzw. komplexem Parameter,  $G$  die  $z$ -Ebene).

Nach einführenden Kapiteln werden Integrale in bezug auf Spektralscharen erklärt und untersucht (Kap. III) und die kanonische Darstellung der beschränkten normalen Tr. hergeleitet (Kap. IV). Es folgt die Erklärung der nicht-beschränkten Tr. und der Begriffe Adjungierte, Vertauschbarkeit, Reduktion, selbstadjungierte und normale Tr. (Kap. V) sowie die Theorie der symmetrischen Tr. und ihrer Fortsetzungen (Kap. VI). Nach weiterem Ausbau der Integrationstheorie (Kap. VII) werden die Ergebnisse von Kap. IV auf nichtbeschränkte normale Tr. ausgedehnt (Kap. VIII). Kap. IX—XI behandeln das Spektrum (einschl. Störungstheorie), Funktionen von normalen Tr. und von Abelschen Systemen normaler Tr., endlich die Spektraldarstellung von Gruppen unitärer und Halbgruppen selbstadjungierter oder normaler Tr. — Für einige wichtige Sätze werden mehrere Beweise gebracht; periphere Ergebnisse sind z. T. ohne Beweis zitiert.

Weeken (Frankfurt a. M.).

Rellich, Franz: *Störungstheorie der Spektralzerlegung*. 5. Math. Ann. 118, 462—484 (1942).

Für die früheren Mitt. vgl. dies. Zbl. 16, 62, 63; 20, 306; 23, 135. — Es wird an dem Beispiel des Eigenwertproblems  $u'' + \lambda u = 0$  mit den Randbedingungen  $u(0) = 0$ ,  $\varepsilon u'(1) + u(1) = 0$  gezeigt, daß es selbstadjungierte Operatoren  $A(\varepsilon)$  gibt, die im ungestörten Zustand  $\varepsilon = 0$  ein diskretes Spektrum  $\lambda_n$  mit den Eigenfunktionen  $\varphi_n$  besitzen, zu denen die in  $\varepsilon = 0$  regulär analytischen Eigenwerte  $\lambda_n(\varepsilon) = \lambda_n + \varepsilon \lambda_n^{(1)} + \dots$  und Eigenfunktionen  $\varphi_n(\varepsilon) = \varphi_n + \varepsilon \varphi_n^{(1)} + \dots$  von  $A(\varepsilon)$  gehören, daß aber trotzdem die  $\lambda_n(\varepsilon)$  für  $\varepsilon \neq 0$  nicht das gesamte Spektrum bilden. Gerade der tiefste Eigenwert des gestörten Problems wird hierdurch nicht erfaßt. Es werden Untersuchungen angestellt, für welche regulären Störungsprobleme solche nichtregulären Bestandteile im Spektrum nicht auftreten können. — Dieses „reguläre Spektrum“ wird so definiert:  $A(\varepsilon)$  sei in  $\mathfrak{U}(\varepsilon)$  symmetrisch für alle  $\varepsilon$  aus  $\varrho_1 < \varepsilon < \varrho_2$ .  $A(\varepsilon)$  besitzt in  $(\varrho_1, \varrho_2)$  ein reguläres, diskretes Spektrum, wenn es Funktionen  $\lambda_n(\varepsilon)$  und Elemente  $\varphi_n(\varepsilon)$  aus  $\mathfrak{U}(\varepsilon)$  gibt, die regulär in der Umgebung jedes  $\varepsilon$  aus  $(\varrho_1, \varrho_2)$  sind und so, daß dort 1)  $A(\varepsilon)\varphi_n(\varepsilon) = \lambda_n(\varepsilon)\varphi_n(\varepsilon)$ , 2) die  $\varphi_n(\varepsilon)$  ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem bilden, 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n(\varepsilon)| = \infty$  gilt. Es wird nun der Satz bewiesen:



Für eine Umgebung von  $\varepsilon = 0$  sei  $A(\varepsilon)$  in einem festen, von  $\varepsilon$  unabhängigen Definitionsbereich  $\mathfrak{A}$  symmetrisch.  $A(\varepsilon)u$  sei regulär für jedes  $u$  aus  $\mathfrak{A}$ . Der ungestörte Operator  $A(0)$  sei in  $\mathfrak{A}$  selbstadjungiert und besitze ein diskretes Spektrum. Dann hat  $A(\varepsilon)$  in einer Umgebung von  $\varepsilon = 0$  ein reguläres Spektrum. Dieser Satz, dessen wesentliche Voraussetzung die Unabhängigkeit des Definitionsbereiches  $\mathfrak{A}$  von  $\varepsilon$  ist, bedeutet für die klassischen Differentialoperatoren, daß immer ein reguläres diskretes Spektrum vorliegt, wenn der Störungsparameter nicht in den Randbedingungen vorkommt. Für halbbeschränkte Operatoren wird ein reguläres diskretes Spektrum sogar nachgewiesen, wenn nur die zugehörige Form in einem von  $\varepsilon$  unabhängigen Definitionsbereich erklärt ist. Der Beweis verläuft über die vollstetigen Reziproken zu  $A(\varepsilon)$ , für die ebenfalls der Begriff reguläres Spektrum erklärt wird und ein dem obigen Satz entsprechender bewiesen wird, der unmittelbar einen Satz über Integralgleichungen der Form

$\int_0^1 K(x, y; \varepsilon) \varphi(y) dy = \lambda \varphi(x)$  liefert. — Ferner werden die folgenden, einander ent-

sprechenden Sätze über Operatoren bewiesen: 1) Wenn es überhaupt einen in  $\mathfrak{A}$  selbstadjungierten Operator  $A$  mit diskretem Spektrum gibt, dann hat jeder in  $\mathfrak{A}$  oder in einem Teilraum von  $\mathfrak{A}$  selbstadjungierte Operator ein diskretes Spektrum. 2) Es sei  $R$  ein beschränkter, symmetrischer Operator mit dem Wertebereich  $\mathfrak{B}$ . Wenn es dann überhaupt einen vollstetigen symmetrischen Operator gibt, dessen Wertebereich den Bereich  $\mathfrak{B}$  enthält, dann ist auch  $R$  vollstetig. — Zwei Gegenbeispiele beschließen die Arbeit. Das eine lautet: Es wird ein in einem festen  $\mathfrak{A}$  selbstadjungierter, regulärer Operator  $A(\varepsilon)$  angegeben und ein  $u$  in  $\mathfrak{A}$ , so daß  $A(\varepsilon)u$  nicht regulär ist. Das andere bezieht sich auf die Existenz eines gemeinsamen Konvergenzintervalls für die  $\lambda_i(\varepsilon)$ , die zu dem regulären Spektrum eines vollstetigen Operators gehören. *Köthe.*

**Wavre, Rolin: La décomposition spectrale des opérateurs hermitiens.** C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 24) 59, 112—115 (1942).

Esquisse de démonstrations des résultats annoncés antérieurement (ce Zbl. 26, 412). L'Au. montre en particulier comment, lorsque  $A$  est un opérateur hermitien du type qu'il considère (opérateurs qu'il appelle „réguliers“),  $f$  un élément quelconque de l'espace de Hilbert, on peut obtenir par récurrence transfinie (s'étendant à un ensemble dénombrable d'ordinaux de seconde classe) le développement de  $f$  en série  $\sum_x c_x f_x$ , où les  $f_x$  sont les éléments propres de  $A^2$ . *J. Dieudonné (Nancy).*

**Wavre, Rolin: Sur les équations linéaires à opérateurs hermitiens.** C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 24) 59, 157—159 (1942).

Utilisant le développement  $f = \sum_x c_x f_x$ , où  $f$  est un élément de l'espace de Hilbert, les  $f_x$  des éléments propres de  $A^2$ ,  $A$  un opérateur hermitien „régulier“ au sens de l'Au. (voir Réf. précédente), ce dernier en déduit, par le procédé classique, le développement suivant les  $f_x$  de toute solution de l'équation linéaire  $\varphi = f + \frac{1}{\nu} A(\varphi)$ ; ce développement converge lorsque  $\nu^2$  est distinct des valeurs propres  $\lambda_x^2$  correspondant aux  $f_x$ , et des points d'accumulation de ces valeurs propres. *J. Dieudonné (Nancy).*

**Vigier, Jean-Pierre: Quelques résultats complémentaires à la théorie de l'itération des opérateurs de M. Wavre.** C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 24) 59, 159—162 (1942).

Extension des résultats de R. Wavre sur les opérateurs hermitiens (voir les deux Réf. précédentes) aux opérateurs hermitiens gauches. L'Au. transcrit également, en termes abstraits, le théorème de E. Schmidt sur le développement suivant les fonctions propres de l'opérateur hermitien  $AA^*$  (où  $A$  est un opérateur quelconque) de toute fonction de la forme  $A(h)$ . *J. Dieudonné (Nancy).*

**Lijn, G. van der: Sur les équations intégrales à noyau symétrique.** Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 10, 218—223 (1941).

Soit  $A$  une transformation hermitienne continue de l'espace  $H$  de Hilbert. L'au.

démontre par un raisonnement variationnel usuel, qu'à tout  $\varepsilon > 0$  on peut associer un élément  $x \in H$  et un nombre  $\lambda$  tels que  $\|x\| = 1$  et  $\|x - \lambda Ax\| < \varepsilon$ . — Le réf. remarque que cette proposition est une conséquence immédiate de la théorie spectrale bien connue des transformations hermitiennes bornées. *Béla de Sz. Nagy* (Szeged).

**Wong, Y. K.: On biorthogonal matrices.** Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 421—431 (1941).

Die Untersuchungen des Verf. bewegen sich ganz im Rahmen der „General Analysis“ von E. H. Moore (Philadelphia 1935; dies. Zbl. **13**, 116). Es werden zwei Relationen für Paare von nichtbeschränkten Matrizen eingeführt, die Kontracedenz und die Biorthogonalität, und ihre Eigenschaften studiert. *G. Köthe* (Gießen).

### **Praktische Analysis:**

● **Barlow: Tables des carrés, cubes, racines carrées, racines cubiques et inverses. Nouveau tirage.** Paris: Ch. Béranger 1940. 200 pag. ffrs. 30.—.

● **Rühlmann und Schmiedel: Vierstellige Logarithmen- und Zahlentafeln. 17., völl. Neubearb. Aufl.** Leipzig: Julius Klinkhardt 1943. 104 S. RM. 2.20.

Die bekannte Rühlmannsche Tafel wurde unter neuem Verf. der Forderung der Zeit entsprechend vollständig neu bearbeitet. Sie wurde, wenigstens was die wichtigsten Funktionen anlangt, durchweg vierstellig angelegt, was den Bedürfnissen des Schulunterrichts und der Praxis, insbesondere der technischen, durchaus Rechnung trägt. Dafür wurde aber die Tafel so ausführlich angelegt, daß normalerweise ein Interpolieren fortfällt. Das bedingt zwar einen größeren Raum, bringt aber eine starke Entlastung beim Rechnen, Ausschaltung einer Fehlermöglichkeit und beachtlichen Zeitgewinn mit sich. Der Kern des Werkes besteht aus Tafeln der Briggschen Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 9999 und der trigonometrischen Funktionen von Minute zu Minute. Daneben werden, wie auch sonst üblich, noch gegeben: Die natürlichen Zahlen der trig. Funktionen von 6 zu 6 Minuten, die Bogenlängen, Sehnenlängen usw., ferner Quadrate, Kuben, Quadrat- und Kubikwurzeln, natürliche Log., Kreisumfänge und -inhalte für die Zahlen 1 bis 999. Bei der Kreisunterteilung wurde auch, der neuen Praxis Rechnung tragend, eine Dezimalteilung der Minuten mitaufgenommen, ferner durch Zusatztafeln der Übergang von der 90°- zur 100°-Teilung und umgekehrt ermöglicht. 2 Tafeln für Zinseszins- und Versicherungsrechnung geben kaufmännischen Bedürfnissen Raum. Den Schluß des Buches bilden Zahlentafeln aus Astronomie und Geographie sowie Physik und Chemie, die insbesondere durch Benutzung des Tabellenwerks von Landolt-Börnstein (Springer, Berlin) auf den neuesten Stand gebracht wurden. In einem kleinen Anhang sind die wichtigsten mathematischen Formeln zusammengefaßt, die der praktische Rechner oft benötigt. Den neuen Din-Vorschriften wurde überall Rechnung getragen. *A. Hofmann.*

● **Rohrberg, Albert: Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenstabes. 7. Aufl.** (Math.-phys. Bibl. Reihe 1, 23.) Leipzig u. Berlin: Teubner 1941. IV, 49 S. RM. 1.20.

● **Wendling, Eugen: Der Rechenschieber und sein Gebrauch (System Rietz).** 3. Aufl. Zürich: Ernst Wurzel 1942. 53 S. sfr. 1.50.

Die früheren Auflagen sind nicht in dies. Zbl. angezeigt. Nach dem Vorwort legt Verf. auf das Verständnis und auf die einfachen und genauen Rechenverfahren den Hauptwert. Es werden behandelt: Die Ablesung der Logarithmen und der Numeri, die Multiplikation und die Division und in einem kurzen Anhang dazu die Proportionsrechnungen, dann das Quadrieren und Quadratwurzelziehen, im Anschluß daran die Berechnung von Ausdrücken  $a^2b$ ,  $a^2b^2$ ,  $a/b^2$ ,  $a^2/b$ ,  $a^2/b^2$ , und ähnliche mit Quadratwurzeln, Kreisrechnungen, Kubieren und Kubikwurzelziehen, endlich Rechnen mit Winkelfunktionen. Für die Bestimmung des Stellenwerts werden zum Teil Regeln gegeben, zum Teil wird auf Abschätzungen verwiesen. *L. Schrutka* (Wien).

**Füsgen, Peter: Genaueres Rechnen durch — Annäherungen.** Meßtechnik **18**, 173—175 (1942).

An einer Reihe gut ausgewählter Beispiele (Unterschied zwischen Hypotenuse und Kathete, wenn die andre Kathete sehr klein ist, Unterschied zwischen Bogen und Sehne bei kleinem Mittelpunktswinkel, Pfeilhöhe eines Bogens mit kleinem Mittelpunktswinkel u. a.) wird dem praktischen Rechner vor Augen geführt, wie die Verwendung von Reihenentwicklungen eine Erhöhung der Genauigkeit oder eine Verminderung der Rechenarbeit mit sich bringt, ja in gewissen Fällen bei Benützung der vorhandenen Tafeln erst die Durchführung von Rechnungen ermöglicht. *L. Schrutka.*



**Lorenz, Julius:** Ein Produktverhältnismesser. ETZ 63, 489—494 (1942).

Das beschriebene Gerät gestattet, das Verhältnis von zwei Produkten  $i_Z I_Z$  und  $i_N I_N$ , also die Größe  $i_Z I_Z / i_N I_N$ , abzulesen, wenn  $i_Z$ ,  $I_Z$ ,  $i_N$  und  $I_N$  als elektrische Ströme eingeführt werden. Es besteht aus zwei Leistungsmessern, die gekoppelt sind, z. B. gemeinsame Achse besitzen. Das Drehmoment jedes Leistungsmessers hängt vom Ausschlag  $\varphi$  ab und ist zu  $i_Z I_Z$  bzw.  $i_N I_N$  proportional. Mechanische Richtkräfte sind nicht vorhanden. Bei passender, verschiedenartiger Ausschlagabhängigkeit in beiden Teilsystemen besteht Gleichgewicht zwischen den Drehmomenten jeweils nur für einen einzigen Ausschlagwinkel  $\varphi$ ; die Ausschläge können nach Werten des Produktverhältnisses der 4 Ströme geeicht werden. Ein ausgeführtes Gerät, das zur Anzeige von Produktverhältnissen im Bereich 0,16 ... 6,25 eingerichtet war, zeigte Fehler bis zu 1,9%. Ein späterer Aufsatz soll die Anwendung des Gerätes behandeln.

Theodor Zech (Dessau).

**Neder, Ludwig:** Über die Berechnung von beliebig langen Aggregaten und „Faktorgregaten“ mit Hilfe eines einzigen einfachen Nomogramms. Z. angew. Math. Mech. 22, 238 (1942).

Im Anschluß an eine frühere Mitteilung [AWF.-Mitt. 21, 77 (1939)] gibt Verf. an, wie man mit Hilfe eines geeignet angeordneten Systems von Funktionsleitern  $[\xi^{(v)}] \triangleq \varphi_v(\xi^{(v)})$  und  $[\eta] \triangleq f(\eta)$  und einer Netztafel für Addition (bzw. einer Doppeltafel für Addition und Subtraktion) für ein  $n$ -gliedriges Aggregat  $f(\eta) = \sum_{v=0}^n \pm \varphi_v(\xi^{(v)})$  den Wert  $\eta$  graphisch ermitteln, und die entsprechende Aufgabe für das „Faktorgregat“

$g(\eta) = \prod_{v=0}^n \varphi_v(\xi^{(v)})$  in entsprechender Weise mittels der Funktionsleitern  $[\xi^{(v)}] \triangleq \log \varphi_v(\xi^{(v)})$  und  $[\eta] \triangleq \log g(\eta)$  lösen kann. Das angegebene Verfahren, bei dem zur Bestimmung eines Wertes  $\eta$   $3n + 1$  Geraden angelegt werden müssen, dürfte gegenüber der in den üblichen Leitertafeln verwendeten Parallelanordnung sämtlicher Leitern, bei der die Additionstafel durch  $\leq n - 1$  Zapfenlinien zu ersetzen ist, dann aber nur  $n$  Geraden zur Bestimmung von  $\eta$  gebraucht werden, kaum Vorteile bieten. H. Heinrich.

**Heinhold, J.:** Zur Interpolation bei ungleichen Tafelabständen. Z. angew. Math. Mech. 22, 235—238 (1942).

Die Newtonsche Interpolationsformel wird auf eine Gestalt gebracht, die der für gleichabständige Argumente (hier mit absteigenden Differenzen geschrieben)

$$y = y_0 + \Delta_0^{(1)} t + \Delta_0^{(2)} \frac{t(t+1)}{1 \cdot 2} + \Delta_0^{(3)} \frac{t(t+1)(t+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \left( \frac{x - x_0}{h} = t \right)$$

angeglichen ist:

$$y = y_0 + D_0^{(1)} t + D_0^{(2)} \frac{t(t+a_1)}{a_1 \cdot a_2} + D_0^{(3)} \frac{t(t+a_1)(t+a_2)}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} + \dots$$

hierin ist  $\frac{x - x_0}{x_0 - x_1} = t$ ,  $\frac{x_0 - x_v}{x_0 - x_1} = a_v$  ( $a_1 = 1$ ) und die  $D$  sind die verallgemeinerten Differenzen

$$D_v^{(1)} = \Delta_v^{(1)}, D_v^{(2)} = D_v^{(1)} - \frac{x_v - x_{v+1}}{x_{v+1} - x_{v+2}} D_{v+1}^{(1)}, D_v^{(3)} = D_v^{(2)} - \frac{(x_v - x_{v+1})(x_v - x_{v+2})}{(x_{v+1} - x_{v+2})(x_{v+1} - x_{v+3})} D_{v+1}^{(2)}$$

usw. Die Formel eignet sich vor allem, falls in derselben Tafel sehr viele Interpolationen durchgeführt werden müssen, und wenn der durch ein neues Argument hinzutretende Beitrag schnell abgeschätzt werden soll. Es wird insbesondere auch der Fall behandelt, daß zuerst die benachbarten und dann die weiter entfernten Argumente herangezogen werden.

L. Schrutka (Wien).

**Jossa, Franco:** Risoluzione progressiva di un sistema di equazioni lineari. Analogia con un problema meccanico. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 10, 346—352 (1940).

Es seien (\*)  $\sum_{h=1}^n a_{ih} x_h = b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ein lineares Gleichungssystem und  $\alpha_{ih}$  die reziproken Elemente der Determinanten  $|a_{ih}|$  ( $i, h = 1, 2, \dots, n$ ). Bekanntlich gilt

(\*\*)  $x_i = \sum_{h=1}^n \alpha_{ih} b_h$ . Wir nennen nun  $\alpha_{ih}^{(k)}$  die reziproken Elemente der Determinanten  $|a_{ih}|$  ( $i, h = 1, 2, \dots, k$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ ). Verf. hebt zuerst hervor, daß sich die Elemente  $\alpha_{ih}^{(k)}$  ( $i, h = 1, 2, \dots, k$ ) durch sich wiederholende Formeln und auf ziemlich einfache Weise durch die Elemente  $\alpha_{ih}^{(k-1)}$  ( $i, h = 1, 2, \dots, k-1$ ) und die Elemente  $a_{ih}$  ( $i, h = 1, 2, \dots, k$ ) ausdrücken lassen. Verf. schlägt deshalb vor, zur Lösung des Systems (\*) mit der direkten Berechnung der Elemente  $\alpha_{ih}^{(2)}$  ( $i, h = 1, 2$ ) zu beginnen und dann, mittels der sich wiederholenden Formeln, die Elemente  $\alpha_{ih}^{(3)}$  ( $i, h = 1, 2, 3$ ),  $\alpha_{ih}^{(4)}$  ( $i, h = 1, 2, 3, 4$ ), ...,  $\alpha_{ih}^{(n)} = \alpha_{ih}$  ( $i, h = 1, 2, \dots, n$ ) zu berechnen. Die Formeln (\*\*) ergeben dann die Lösung des Systems (\*). Das Verfahren erfordert ziemlich langwierige Berechnungen.

L. Cesari (Pisa).

Schulz, Günther: Über die Lösung von Gleichungssystemen durch Iteration. Z. angew. Math. Mech. 22, 234—235 (1942).

Für das Iterationsverfahren

$$x^{(v+1)} = \varphi(x^{(v)}, y^{(v)}), \quad y^{(v+1)} = \psi(x^{(v)}, y^{(v)})$$

zur Lösung von  $x = \varphi(x, y)$ ;  $y = \psi(x, y)$  lautet eine hinreichende Konvergenzbedingung, daß die Matrix  $\begin{pmatrix} M_x & M_y \\ N_x & N_y \end{pmatrix}$  nur charakteristische Zahlen hat, die dem Betrage nach kleiner als 1 sind. Dabei sind  $M_x, M_y, N_x, N_y$  obere Schranken von  $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|$ , bzw.  $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|$ ,  $\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|$ ,  $\left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|$  in einem konvexen Bereich der  $x, y$ -Ebene, der sämtliche Näherungen  $x^{(v)}, y^{(v)}$  und die Lösung  $x, y$  enthält. Der Satz gilt entsprechend auch für mehr als zwei Unbekannte.

Collatz (Karlsruhe).

Bachmann, W. K.: Résolution mécano-optique d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues. Schweiz. Z. Vermessungswes. 40, 241—247 (1942).

Anwendung des Verfahrens der schrittweisen Annäherung in seiner einfachsten Form zur Auflösung eines linearen Gleichungssystems, um aus zwei unabhängigen Beobachtungen den Parallaxenfehler zu eliminieren; die geometrische Interpretation des Verfahrens, rechnerische Abkürzungen und durch die Aufgabenstellung nahegelegte Ergänzungen bringen nichts wesentlich Neues. v. Guérard (Darmstadt).

Willers, Fr. A.: Differentiatoren. (J 081-7.) Arch. techn. Messen Liefg 135 (1942).

Bebilderte Übersicht über die Geräte zum Differenzieren (ausgenommen Geräte zum Zeichnen der Differentialkurve): Tangenzenzeichner von Pflüger, Spiegellineal, Derivimeter von Ott, Prismenderivator von v. Harbou. Krümmungsmessung nach Bennecke, Emde, Katterbach. 9 Literaturhinweise.

Theodor Zech.

Willers, Fr. A.: Grundintegraphen und Differentiographen. (J 081-8.) Arch. techn. Messen Liefg 137 (1942).

Beschreibung von Geräten zur Differentiation und zur Quadratur mit Kurvendarstellung des Ergebnisses. Insbesondere werden die Geräte von Abdank-Abakanowicz-Coradi, v. Harbou, Adler-Ott und Ott an Hand schematischer Darstellungen und von Photos erläutert. Hinzugenommen wird der Produktintegraph von

Pascal für  $\int_0^x g(\xi) \cdot h(\xi) d\xi$ . Einige ältere Geräte werden erwähnt. 20 Literaturhinweise.

Theodor Zech (Dessau).

Hofferberth, Wilhelm: Beispiele zur numerischen Anwendung direkter Methoden der Variationsrechnung. Darmstadt: Diss. 1941. 21 Bl.

Meyer-Eppler, W.: Verzerrungen, die durch die endliche Durchlaßbreite physikalischer Apparate hervorgerufen werden, nebst Anwendung auf die Periodenforschung. Ann. Physik, V. F. 41, 261—300 (1942).

Bei der Beobachtung vieler physikalischer Vorgänge entstehen Verfälschungen dadurch, daß Mittelwerte über gewisse räumliche oder zeitliche Intervalle beobachtet werden. Es entsteht dadurch eine Unschärfe, die von dem Intervall der Mittelwertbildung und gegebenenfalls von einer sich über das Intervall erstreckenden Gewichts-



funktion abhängt — so z. B. bei optischen Abbildungen aller Art, bei Beobachtungen durch Spalte endlicher Breite und verschiedener Form usw. Die Theorie der Verzerrung von derartigen Vorgängen läßt sich auf die Behandlung von Integralgleichungen der Form

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) J(\xi - x) d\xi$$

zurückführen, wobei  $J(x)$  die Originalfunktion,  $A(z)$  die Gewichtsverteilung (Apparatfunktion) und  $E(x)$  die (verzerrte) Bildfunktion darstellt. Besonders aufschlußreich ist die Untersuchung der Wirkung von Apparatfunktionen verschiedener Art auf verschiedene einfach gestaltete Originalfunktionen, die je nach Art des Problems in Potenzreihen, Kugelfunktionen, Laguerresche oder Hermitesche Polynome oder in trigonometrische Reihen entwickelt werden können. Verf. beschäftigt sich dann insbesondere mit der Wirkung der Verzerrung auf periodische Funktionen. Bei Benutzung rechteckiger Spalte werden z. B. Wellen von der Länge der Spaltbreite in der Abbildung ganz zerstört, in anderen Fällen treten Phasenverschiebungen, Vertauschungen von Maxima und Minima, Verminderung der Wellenzahl und andere Erscheinungen auf. Am günstigsten sind Apparatfunktionen von exponentieller Gestalt (z. B.  $e^{-z^2}$ ), bei denen die größten Täuschungen vermieden werden, und die auch (mit Hilfe der inversen Gaußtransformation) eine verhältnismäßig einfache Reduktion ermöglichen. Verf. wendet die Theorie dieser Bildverzerrungen auf die Periodenforschung an und beschreibt u. a. die Konstruktion eines „Projektionsperiodographen“, bei dem (ähnlich wie beim Periodographen von Douglass) die als Transparent gestaltete Originalkurve durch ein Gitter abgebildet wird. Mit diesem Apparat lassen sich auch quasipersistente Periodizitäten voneinander trennen, wie an einigen sehr instruktiven Beispielen gezeigt wird.

K. Stumpff (Graz).

**Zech, Theodor:** Über das Sprungstellenverfahren zur harmonischen Analyse. Arch. Elektrotechn. **36**, 322—328 (1942).

Eine Schwierigkeit in der Anwendung des Sprungstellenverfahrens tritt auf, wenn die Reihendarstellung der Fourierkoeffizienten unendlich viele Glieder aufweist, da dann ihre Konvergenz nicht selbstverständlich ist. Eine frühere Arbeit von A. Walther hatte zwar die Berechtigung des üblichen Rechenverfahrens auch für diese Fälle nachgewiesen, jedoch wurden damit einige Paradoxien noch nicht geklärt. In der vorliegenden Arbeit werden die Lücken in den bisher gemachten Voraussetzungen aufgewiesen und durch Vervollständigung der Formel für die Fourierkoeffizienten die letzten Unsicherheiten beseitigt.

G. Koehler (Darmstadt).

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung:

**Hadwiger, H.:** Über gleichwahrscheinliche Aufteilungen. Z. angew. Math. Mech. **22**, 226—232 (1942).

Verf. behandelt folgende Aufgabe:  $n$  stetige nichtnegative Variable  $\xi_1 \dots \xi_n$  seien durch die Gleichung (1)  $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = 1$  verknüpft; alle Aufteilungen der 1 in der Form (1) seien gleichwahrscheinlich, d. h. ihre Wahrscheinlichkeit gleich  $\int d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n-1}$ , über die jeweilig betrachtete Menge erstreckt. Gefragt wird zunächst nach der Wahrscheinlichkeit  $X_n(\xi)$ , daß alle  $\xi_\nu \leq \xi$ ,  $\nu = 1 \dots n$  seien. Verf. gewinnt diese Funktion, indem er aus den Zusammensetzungsregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung für sie die Funktionalgleichung

$$X_n(\xi) = (n-1) \int_{1-\xi}^1 X_{n-1}\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) \zeta^{n-2} d\zeta$$

ableitet, die durch den Ansatz (2)  $X_n(\xi) = 2 \cdot (n-1)! \xi^{n-1} \Phi_n\left(\frac{2}{\xi} - n\right)$  in die Funktionalgleichung

$$\Phi_n(x) = \int_{x-1}^{x+1} \Phi_{n-1}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{n-1}(y) \Phi_1(x-y) dy; \quad \Phi_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{,, } |x| > 1 \end{cases}$$

übergeht. Deren Lösung ergibt sich mittels des Faltungssatzes der Fouriertransformation zu

$$(3) \quad \Phi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^n \cos xt \cdot dt,$$

was in (2) einzusetzen ist. Nach Laplace gilt

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot (n-1)!} \sum_{\lambda=0}^{\left[ \frac{n \pm x}{2} \right]} (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} (n \pm x - 2\lambda)^{n-1},$$

und nach Pólya [Math. Ann. **74**, 204–212 (1913)] asymptotisch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \Phi_n(\alpha \sqrt{n}) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-3\alpha^2/2}.$$

Zweitens bestimmt Verf. den Erwartungswert  $\theta_n$  für die größte Zahl  $\xi_0$  unter den  $\xi_\nu$  ( $\nu = 1 \dots n$ ) aus

$$\theta_n = 1 - \int_0^1 X_n(\xi) d\xi,$$

indem er diese Beziehung zur Herleitung der linearen Rücklaufformel

$$\theta_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \theta_{n-2} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right); \quad \theta_1 = 1, \quad \theta_2 = \frac{3}{4}$$

benutzt, aus der sofort die schöne Endformel

$$\theta_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

folgt.

Harald Geppert (Berlin).

**Heyne, Johannes:** Untersuchungen über die Anwendbarkeit der  $3\mu$ -Regel auf die Differenz zweier unbekannter Wahrscheinlichkeiten. Leipzig: Diss. 1940. 33 S.

In Anlehnung an Arbeiten von v. d. Waerden [Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig **87**, 353–364 (1935); **88**, 21–30 (1936); dies. Zbl. **13**, 409; **15**, 168] bestimmt Verf. die Verteilung  $f(z)$  der Differenz  $z = p_1 - p_2$  zweier unbekannter Wahrscheinlichkeiten unter Zugrundelegung des Bayesschen Satzes und der Annahme, daß die Werte von  $p_1$  und  $p_2$  zwischen 0 und 1 a priori gleich wahrscheinlich sind. Die Verteilung  $f(z)$  und die Wahrscheinlichkeit  $S$  dafür, daß  $z$  sich von der beobachteten Differenz der relativen Häufigkeiten höchstens um das Dreifache des mittleren Fehlers unterscheidet, wird für einige Beispiele mit kleinen Beobachtungszahlen  $n$  exakt bestimmt; für große  $n$  werden für  $f(z)$  und  $S$  asymptotische Formeln abgeleitet, die unter der Voraussetzung gelten, daß die beobachteten relativen Häufigkeiten nicht zu nahe an 0 oder 1 liegen. Für die behandelten Fälle unterscheidet sich  $S$  nicht wesentlich von dem für die Gaußsche Verteilung geltenden Wert 0,997. Höfding.

**Aitken, A. C.:** On the independence of linear and quadratic forms in samples of normally distributed variates. Proc. roy. Soc. Edinburgh **60**, 40–46 (1940).

Soit dans un espace à  $n$  dimensions le vecteur aléatoire  $x$ , normalement distribué, ayant  $V$  pour matrice des moments du deuxième ordre. Si l'origine est au point moyen, la loi de distribution de  $x$  est

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} x V^{-1} x\right\}.$$

Etant donnés un vecteur  $a$  et une matrice symétrique  $B$ , l'auteur démontre que la condition nécessaire et suffisante pour que la forme linéaire  $ax$  et la forme quadratique  $xBx$  soient indépendantes est que la forme quadratique  $a(V^{-1} - \beta B)^{-1}a$  soit indépendante de la valeur de la variable (scalaire)  $\beta$ . De même la condition nécessaire et suffisante pour que les formes quadratiques  $xBx$  et  $xCx$  soient indépendantes est que le déterminant  $|I - \beta VB - \gamma VC|$  (où  $I$  est la matrice unité,  $\beta$  et  $\gamma$  deux scalaires



arbitraires) soit de la forme  $|I - \beta VB| \cdot |I - \gamma VC|$ . L'auteur applique ses méthodes au problème classique de l'indépendance de la moyenne et du moment central du deuxième ordre d'une série de variables normales indépendantes ayant même distribution, et à des problèmes connexes. *Ville (Paris).*

**Schulz, Günther:** Über die Häufigkeit der Iterationen in einer Beobachtungsfolge. Dtsch. Math. 7, 22—38 (1942).

Eine Markoffsche Kette mit  $k$  Merkmalen wird durch die Wahrscheinlichkeit  $q_i^{(0)}$ , bei der Einleitungsziehung das Merkmal  $i$  zu erhalten, und durch die reguläre Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten  $\{v_{ix}\}$  definiert. Dabei bedeutet  $v_{ix}$  die Wahrscheinlichkeit, das Merkmal  $i$  zu bekommen, wenn das Merkmal  $x$  vorangegangen ist. Die Wahrscheinlichkeit, in  $n$  konsekutiven Beobachtungen genau  $x$  Iterationen zu erhalten, sei  $w_n(x)$ . Das Hauptresultat des Verf. besteht in der Ermittlung des Erwartungswertes und der Streuung von  $x$  für sehr große Werte von  $n$ . An numerischen Beispielen zeigt er, daß die verwickelt wirkenden Formeln dennoch eine rasche Auswertung gestatten. Eine Prüfung von 6400 Ziffern der Random sampling numbers von L. H. C. Tippett (Tracts for computers XV, Cambridge 1927) ergibt keine Verkettung. Dagegen glaubt Verf. in der von K. Marbe angelegten Statistik der Geburteneintragungen eine leichte Verkettung zwischen den Merkmalen männlich und weiblich feststellen zu können, hervorgerufen durch Zwillingsgeburten. Zum Schluß deutet Verf. an, wie sich seine Methode auf wesentlich allgemeinere Fragestellungen ausdehnen läßt.

*v. Schelling (Berlin).*

### Statistik:

**Geppert, Maria-Pia:** Das Bayessche Rückschlußproblem. Dtsch. Math. 7, 1—22 (1942).

Der Rückschluß von der Häufigkeit eines Merkmals in einer Stichprobe auf den wahren Anteil dieses Merkmals in der übergeordneten Gesamtheit ist praktisch außerordentlich bedeutsam, logisch aber nur schwierig zu begründen. Im Laufe der Zeit sind viele Vorschläge gemacht worden. Verf. unternimmt es, das recht unübersichtlich gewordene Schrifttum kritisch zu prüfen. Dabei sondert sie vier Methoden heraus: das Maximum-likelihood-Prinzip, die Bayes-Verteilung, die Methode der Mutungsgrenzen und die Verteilung der Rückschluß-Wahrscheinlichkeit. Alle diese Verfahren werden unter sorgfältiger Hervorhebung ihrer Voraussetzungen klar entwickelt, ihre gegenseitige Verflechtung wird gezeigt. Da ihr logischer Inhalt jeweils ein anderer ist, widersprechen sie sich theoretisch nicht, in nichtextremen Fällen sind auch ihre numerischen Auswirkungen weitgehend ähnlich. Neben diesen speziellen Ergebnissen gewährt die wertvolle Darstellung des Bayesschen Problems einen Ausblick auf die verschiedenen Hauptwege zur Lösung des allgemeinen Rückschlußproblems, wie er bisher im deutschen Schrifttum nicht zu finden gewesen ist. *v. Schelling (Berlin).*

**Geppert, Maria-Pia:** Die Anwendung der Pascalschen Verteilung auf das Bayessche Rückschlußproblem. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforsch. 8, 129—137 (1942).

Falls die Beobachtungen einer  $n$ -gliedrigen alternativen Stichprobe in einer bestimmten Reihenfolge gemacht werden, so kennt man außer der Anzahl  $x$  der Merkmalsträger noch das Ergebnis der letzten Beobachtung, was z. B. dann zutrifft, wenn man die Auswahl solange fortsetzt, bis man eine bestimmte Anzahl von Merkmalsträgern beisammen hat. Will man nun auf den Anteil der Merkmalsträger in der Gesamtheit schließen, so verfügt man gegenüber dem Bayesschen Problem über die zusätzliche Kenntnis der letzten Beobachtung. Man wird also auf die Pascalverteilung geführt, die Rückschlußwahrscheinlichkeit ändert sich. Verf. wendet im Anschluß an ihre frühere Arbeit (vgl. vorsteh. Referat) die von ihr logisch auseinander gehaltenen vier Methoden zur Schätzung unbekannter Parameter an. Es zeigt sich übereinstimmend, daß die Ausnützung der zusätzlichen Kenntnis hauptsächlich zur Beurteilung des wahren Anteils seltener Merkmale von Vorteil ist. *v. Schelling (Berlin).*

**Odone, Vincenzo:** Il collaudo di prodotti in serie ed il calcolo delle probabilità. Atti Accad. Sci. Torino **77**, 407—430 (1942).

Verf. befaßt sich mit folgender Aufgabe der Warenprüfung: Ein Posten von  $N$  Stücken wird vertragsgemäß angenommen bzw. zurückgewiesen, je nachdem eine Stichprobe von  $m$  Stücken weniger als  $L\%$  bzw.  $L\%$  oder mehr fehlerhafte Stücke aufweist. Gefragt wird nach der kleinsten Zahl  $m$  der Proben, die man machen muß, damit, wenn die unbekannte wahre Häufigkeit fehlerhafter Stücke im Gesamtposten  $\leq L - T$  ( $T > 0$ ) ist, der Posten mindestens mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit  $\theta$  (z. B.  $\theta = 0,9$ ) angenommen wird, und, wenn die Häufigkeit fehlerhafter Stücke im Gesamtposten  $\geq L + T$  ist, der Posten wenigstens mit der Wahrscheinlichkeit  $\theta$  zurückgewiesen wird. Es muß also im ersten Fall die Wahrscheinlichkeit für eine unterhalb  $L$  liegende, im zweiten Fall die Wahrscheinlichkeit für eine nicht unterhalb  $L$  liegende Fehlerhäufigkeit in der Stichprobe mindestens  $\theta$  betragen. Die Aufgabe wird für einen im Vergleich zur Stichprobe sehr großen Posten mit nicht extremer Fehlerhäufigkeit durch Heranziehung der Normalverteilung (Bernoullisches Schema) behandelt; der Fall eines Postens von beschränkter Stückzahl (Fall ohne Zurücklegen) wird näherungsweise auf den behandelten zurückgeführt. *M. P. Geppert.*

**Gaede, Kurt:** Anwendung statistischer Untersuchungen auf die Prüfung von Baustoffen. Bauingenieur **23**, 291—296 (1942).

Da in weiten Kreisen des Bauwesens keine klare und eindeutige Stellungnahme zur grundlegenden Frage besteht, wie Stichproben einwandfrei zu beurteilen sind, unternimmt es Verf., über die Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung für diese Aufgabe und über bekannte, einfache Verfahren der mathematischen Statistik aufzuklären. Insbesondere zeigt er, daß es irreführend ist, wenn man gemäß geltenden Abnahmevorschriften bei verschiedenen umfangreichen Stichproben neben dem Mittelwert als Hinweis auf die Streuung den kleinsten vorkommenden Beobachtungswert heranzieht, da dessen wahrscheinlicher Wert mit zunehmendem Umfang der Probe abnimmt. Der Verf. empfiehlt statt dessen die Angabe des Merkmalwertes, jenseits dessen noch 5% der statistischen Elemente liegen. *Hans Gebelein* (Eßlingen).

**Lawley, D. N.:** The estimation of factor loadings by the method of maximum likelihood. Proc. roy. Soc. Edinburgh **60**, 64—82 (1940).

Auf  $n$  Personen werden  $t$  Intelligenzteste angewandt, die zu den Noten  $x_{ik}$  ( $i = 1, \dots, t; k = 1, \dots, n$ ) führen. Es wird angenommen, die Note  $x_i$  des  $i$ -ten Tests setze sich aus verschiedenen Faktoren  $f, \dots, h$  und der persönlichen spezifischen Geschicklichkeitskomponente  $s_i$  im  $i$ -ten Test additiv zusammen:

$$x_i = \lambda_i \cdot f + \mu_i \cdot g + \dots + \nu_i \cdot h + \tau_i \cdot s_i;$$

die Größen  $f, g, \dots, h, s_1, \dots, s_t$  seien in einer unendlichen Population unabhängig voneinander und normal verteilt, ferner auf die mittleren Abweichungen 1 standardisiert. Unter Benutzung der Maximum-Likelihood-Methode leitet Verf. ein iteratives Verfahren zur sukzessiven Approximation der unbekannten Faktorgewichte  $\lambda_i, \mu_i, \dots, \nu_i, \tau_i$  aus den bei  $n$  Personen gewonnenen Noten  $x_{ik}$  her. An einem Zahlenbeispiel werden die Ergebnisse mit denen verglichen, die sich durch Anwendung anderer Verfahren ergeben. Weiterhin wird ein Verfahren angegeben, mit welchem die Anzahl der zugrunde zu legenden Faktoren  $f, g, \dots, h$  geprüft wird. *M. P. Geppert.*

**Féraud, Lucien:** Critères statistiques applicables à un petit nombre d'observations. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 24) **59**, 116—118 (1942).

Sind  $x, y$  voneinander unabhängige, normal verteilte Zufallsvariablen mit den Mittelwerten  $\alpha_x, \alpha_y$  und Präzisionen  $h_x, h_y$  und  $x_1^0, \dots, x_X^0$  und  $y_1^0, \dots, y_Y^0$  Stichproben aus ihnen, so läßt sich aus der bekannten Verteilung der Studentschen Verhältnisse

$$q_x = \frac{1}{X} \cdot \frac{(\Sigma x - X \cdot \alpha_x)^2}{\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/X}, \quad q_y = \frac{1}{Y} \cdot \frac{(\Sigma y - Y \cdot \alpha_y)^2}{\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2/Y}$$



die Verteilung von  $p = q_x \cdot q_y$  als

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{X}{2}\right) \cdot \Gamma^2\left(\frac{Y}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{X-1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{Y-1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{X+Y}{2}\right)} \cdot p^{-\frac{Y+1}{2}} \cdot F\left(\frac{Y}{2}, \frac{Y}{2}, \frac{X+Y}{2}, \frac{p-1}{p}\right)$$

und diejenige von  $w = 1/(1 + q_x)(1 + q_y)$  als

$$\frac{\pi}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{X-1}{2}\right) \cdot B\left(\frac{1}{2}, \frac{Y-1}{2}\right)} \cdot w^{\frac{Y-3}{2}} \cdot F\left(\frac{Y-X+1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-w\right)$$

gewinnen, wo  $F$  die hypergeometrische Funktion darstellt. Diese beiden Verteilungen benutzt Verf. für zwei Kriterien, die zur Prüfung zweier Stichproben aus normal verteilten Gesamtreihen mit bekannten Mittelwerten und unbekannten, nicht notwendig gleichen Präzisionen dienen.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

**Lovera, G.: Un'applicazione del coefficiente di correlazione alle medie statistiche.** Atti Accad. Sci. Torino **77**, 341—346 (1942).

Sind die Glieder eines Kollektivgegenstandes nicht unabhängig voneinander, wie es z. B. bei der Mehrzahl der meteorologischen Erscheinungen der Fall ist, so ist bei der Berechnung statistischer Maßzahlen eine gewisse Vorsicht am Platze. Ein Urteil über die gegenseitige (lineare) Abhängigkeit der Glieder kann aber nur durch die zeitraubende Berechnung einer Vielzahl von Korrelationskoeffizienten gewonnen werden. Verf. zeigt, daß man unter gewissen tragbaren Vernachlässigungen mit der Berechnung eines einzigen Korrelationskoeffizienten auskommt, wenn die entsprechenden Streuungen bekannt sind. Die Formel dafür wird angegeben und auf die Monats- und Jahres-Temperatur-Abweichungen der 174jährigen Reihe von Turin angewandt.

A. Hofmann (Bad Homburg).

### **Biomathematik. Versicherungsmathematik.**

● **Wright, Sewall: Statistical genetics in relation to evolution.** (Actualités scient. et industr. Nr. 802. Exposés de biométrie et de statist. biol. Publiés par Georges Teissier. 13.) Paris: Hermann & Cie. 1939. 63 pag. ffrs 25.—.

Das Buch gibt eine Darstellung der quantitativen Evolutionstheorie, welche Auftreten, Auswirkung und Bedeutung der verschiedenen Entwicklungsfaktoren an der durch diese bewirkten Veränderung der Genhäufigkeiten mißt und beurteilt. Nach kurzer Einleitung werden im Kap. 2 (Genhäufigkeiten in homogenen diploiden Bevölkerungen) die Änderungen der Genhäufigkeit durch Mutations- und Selektionsdruck sowie durch die zufällige Auswahl der Gameten behandelt, in Kap. 3 (Zeugungsstruktur von Populationen) die Auswirkung partieller Isolierung sowie lokaler Selektionsunterschiede auf die mittlere Abweichung der Genhäufigkeit von ihrem Erwartungswert untersucht, in Kap. 4 kompliziertere Erbgänge (geschlechtsgebundene Vererbung, Polyploidie, multiple Allelie), in Kap. 5 Polymerie berücksichtigt. Kap. 6 skizziert den Zusammenhang der biometrischen Eigenschaften einer Bevölkerung mit der Verteilung der entsprechenden Genhäufigkeiten. Schließlich werden in dem umfangreichsten Kap. 7 (Entwicklungsprozeß) auf Grund der in den vorangehenden Kapiteln gewonnenen Beziehungen und Gesetze Ausmaß und Bedeutung der einzelnen Entwicklungskomponenten und optimale Bedingungen für den Entwicklungsprozeß erörtert.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

● **Dell'Agnola, Carlo Alberto: Matematica attuariale. Teoria delle assicurazioni sulla vita.** Venezia: Casa ed. Scarabellin 1941. 309 pag. L. 60.—.

## **Geometrie.**

### **Elementargeometrie:**

● **Agostini, Amedeo: Trigonometria piana e sferica.** 2. ediz. Livorno: R. Accademia Navale 1941. XI, 232 pag.

**Backes, F.:** Sur les droites de Simson. Mathesis 54, 301—304 (1942).

Die Fußpunkte der Lote von einem Punkt des Umkreises eines Dreiecks auf die Dreiecksseiten liegen bekanntlich auf der sogenannten Simsonschen Geraden. — Es werden die folgenden Sätze bewiesen: Seien  $ABCD$  fünf Punkte eines Kreises und bilde man die vier Simsonschen Geraden des Punktes  $O$  in bezug auf die Dreiecke  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$ ,  $BCD$ , dann liegen die Fußpunkte der von  $O$  auf diese vier Simsonschen Geraden gefällten Lote auf einer Geraden. — Seien  $ABCD$  vier Punkte eines Kreises und bilde man für jeden dieser vier Punkte die Simsonsche Gerade in bezug auf das von den drei anderen gebildete Dreieck, dann treffen sich diese vier Simsonschen Geraden in einem Punkte  $O$ . — Seien  $ABCDE$  fünf Punkte eines Kreises. Wenn für je vier dieser Punkte der Schnittpunkt der Simsonschen Geraden jedes Punktes in bezug auf das Dreieck der drei übrigbleibenden aufgesucht und diese Punkte, entsprechend den jeweils fortgelassenen Punkten mit  $A''B''C''D''E''$  bezeichnet werden, dann entsprechen sie den Punkten  $ABCD$  in einer Ähnlichkeit mit dem Verhältnis  $-2$ , liegen also auf einem Kreise, dessen Radius halb so groß wie der des ursprünglichen ist. Auf diesem Kreise liegen aber noch zehn weitere Schnittpunkte der betrachteten Simsonschen Geraden, nämlich jener, welche in bezug auf ein und dasselbe aus  $ABCDE$  herausgegriffene Dreieck von den beiden übrigbleibenden Punkten veranlaßt werden.

*Anna Klingst (Wien).*

**Goormaghtigh, R.:** Sur une enveloppe. Mathesis 54, 295—298 (1940).

Die Hüllkurve der Simsonschen Geraden der Umkreispunkte eines Dreiecks ist bekanntlich die Steinersche Hypozykloide. Verf. bestimmt umgekehrt die Hüllkurve der Simsonschen Geraden eines festen Kreispunktes in bezug auf alle einem Kreis eingeschriebenen und einem gegebenen Dreieck ähnlichen Dreiecke. Eine elegante Rechnung mittels Minimalkoordinaten führt auf eine Kardioide, die geometrisch ebenso elegant konstruiert werden kann. Ebenfalls eine Kardioide ist die Hüllkurve der Lote des jeweiligen Dreieckshöhenschnittpunktes auf die Simsonschen Geraden des festen Kreispunktes.

*Fladt (Tübingen).*

**Pompeiu, D.:** Un théorème de géométrie. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 24, 223—226 (1941).

Aus der Identität

$$\left(\frac{z_1 + z_2}{2} - z_0\right)(z_1 - z_2) + \left(\frac{z_2 + z_3}{2} - z_0\right)(z_2 - z_3) + \dots + \left(\frac{z_n + z_1}{2} - z_0\right)(z_n - z_1) \equiv 0$$

folgt Verf., daß die Strecken, welche die Seitenmitten eines beliebigen ebenen, gleichseitigen, geschlossenen Polygons  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  mit einem beliebigen (komplarenen) Punkt  $z_0$  verbinden, zu einem geschlossenen Polygon zusammengefügt werden können. Grenzübergang führt zu der bekannten Gleichung

$$\oint (z - z_0) dz \equiv 0.$$

Da Verf. das Erscheinen einer Bibliographie in Aussicht stellt, kann Ref. die Bemerkung nicht unterdrücken, daß der hier als Ausgangspunkt dienende Satz, der, mit Berufung auf eine 1936 erschienene Arbeit des Verf., von vielen Autoren als Pompeiischer Satz bezeichnet wurde, schon in Hadamards Géométrie élémentaire, I, p. 233, 1898 (exercice 269) vorkommt. Der vom Verf. 1936 gegebene Beweis, der auf einer Identität zwischen komplexen Zahlen basiert, befindet sich bei Hardy [A course of pure mathematics, 6. ed., Cambridge 1933, p. 101 (example III. 5)].

*E. Egerváry (Budapest).*

**Ionescu, D. V.:** Sur une configuration de six points attachée à un tétraèdre coupé par trois plans parallèles à une face. Mathematica, Cluj 18, 104—111 (1942).

Vier inzidente Strahlen  $a, b, c, p$  werden durch die drei parallelen Ebenen  $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$  in den Punkten  $A_i, B_i, C_i, P_i$  geschnitten. Verf. beweist zunächst, daß der Schnittpunkt  $Q_{ikl}$  der drei Ebenen, welche durch  $P_i, P_k$  bzw.  $P_l (i, k, l = 1, 2, 3)$  parallel zu  $(bc), (ca)$  bzw.  $(ab)$  geführt sind, in der Ebene  $A_i B_k C_l$  liegt. Die sechs Punkte  $Q_{ikl}$  liegen auf einer Ellipse, welche in der Arbeit näher diskutiert wird.

*E. Egerváry (Budapest).*



## Projektive Geometrie:

**Deaux, R.:** Sur les involutions harmoniques à une homographie binaire. *Mathesis* 54, 315—317 (1942).

$\omega$  sei eine Projektivität auf der Geraden mit den Fixpunkten  $A, B$ ;  $\omega$  läßt sich auf unendlichviele Arten in das Produkt zweier Involutionsen  $(1) \omega = J_2 J_1 = J_4 J_3 = \dots$  zerlegen, wobei  $J_v$  die Fixpunkte  $A_v, B_v$  habe; dann gibt es bei passender Bezeichnung auf der Geraden harmonische Projektivitäten, die den Punktwurf  $A_1 B_1 A_2 B_2$  in  $A_3 B_3 A_4 B_4$  überführen und die Fixpunkte  $A, B$  besitzen, also ist in der Darstellung (1) das Doppelverhältnis  $\lambda = (A_1 B_1 A_2 B_2) = (A_3 B_3 A_4 B_4) = \dots$  eine Zerlegungsinvariante; sie läßt sich durch die projektive Invariante  $k = (ABCC')$  von  $\omega$  ( $C' = \text{Bildpunkt von } C \text{ in } \omega$ ) ausdrücken:  $\lambda = (1 + \sqrt{k})^2 / (1 - \sqrt{k})^2$ . Spezialfall:  $\omega = \text{zyklische Projektivität } n\text{-ter Ordnung}$ .

*Harald Geppert* (Berlin).

**Godeaux, Lucien:** Sur un groupe d'homographies planes. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 10, 23—32 (1941).

$\Omega_1, \Omega_2$  mit den Gleichungen  $x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3$  bzw.  $x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_2 : x_3 : x_1$ ,  $\varepsilon = \text{primitive dritte Einheitswurzel}$  seien zwei zyklische vertauschbare ebene Projektivitäten der Periode 3. Die Projektivitäten  $\Omega_3 = \Omega_1 \Omega_2$  und  $\Omega_4 = \Omega_2 \Omega_1$  haben den gleichen Charakter. Jede dieser 4 Abbildungen besitzt 3 Fixpunkte; diese 12 Fixpunkte verteilen sich zu je 4 auf 9 Geraden, und entsprechend gehen von den 12 Fixgeraden von  $\Omega_1 \dots \Omega_4$  je vier durch 9 Punkte der Ebene; diese bilden die Basispunkte eines syzygetischen  $C^3$ -Büschels, nämlich  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \lambda x_1 x_2 x_3 = 0$ .  $H$  sei nun eine Projektivität, die die 3 Fixpunkte von  $\Omega_1$  in diejenigen von  $\Omega_2$  (in irgendeiner Reihenfolge) und einen der Fixpunkte von  $\Omega_3$  in einen von  $\Omega_4$  überführt, etwa die-

jenige mit der Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$ ; alle andern derartigen Abbildungen erhält man

aus  $H$  und  $H^3$  durch Multiplikation mit  $\Omega_i, \Omega_i^2$  ( $i = 1 \dots 4$ ); sie haben die Periode 4.  $H^2$  ist eine harmonische Homologie. Daneben betrachtet man eine Projektivität  $H_1$ , die die 3 Fixpunkte von  $\Omega_1$  in diejenigen von  $\Omega_3$  und einen von  $\Omega_2$  in einen von  $\Omega_4$

überführt, beispielsweise diejenige mit der Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$ ; sie hat ebenfalls die

Periode 4, und es ist  $H_1^2 = H^2$ . Die vier Projektivitäten  $\Omega_1, \Omega_2, H, H_1$  erzeugen nun eine endliche Gruppe der Ordnung 72.  $\Omega_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ) erzeugt in seiner Ebene eine Involution  $J_i^{(3)}$  dritter Ordnung; die Punktgruppen derselben lassen sich birational auf die Punkte einer kubischen Fläche  $F_i^3$  eines  $S_3$  mit 3 biplanaren Doppelpunkten abbilden, die den Fixpunkten von  $\Omega_i$  entsprechen. Den Projektivitäten  $H, H_1$  und ihren analogen entsprechen in  $S_3$  Projektivitäten, die die  $F_i^3$  untereinander vertauschen.

*Harald Geppert* (Berlin).

**Legrand, M.:** Sur les homographies de l'espace n'ayant que deux droites unies. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 10, 73—76 (1941).

$\Omega$  sei eine reelle Projektivität des  $S_3$ , die lediglich zwei reelle windschiefe Fixgeraden hat  $r: x_1 = x_2 = 0$  und  $s: x_3 = x_4 = 0$ . Unter den Quadriken  $Q$ , die  $r$  und  $s$  enthalten, gibt es dann i. a. zwei Paare konjugiert-imaginärer, zu  $\Omega$  automorpher  $Q$  mit den Gleichungen

$$x_1 x_3 - x_2 x_4 \pm i(x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0, \quad x_1 x_3 + x_2 x_4 \pm i(x_1 x_4 - x_2 x_3) = 0.$$

Ersetzt man hierin  $i$  durch einen variablen Parameter  $\lambda$ , so erhält man zwei Quadrikenbüschel, die durch  $\Omega$  in sich übergeführt werden. Unter den Elementen jedes dieser Büschel induziert  $\Omega$  entweder eine elliptische Homographie oder die Identität; im letzten Falle sind die durch  $\Omega$  auf  $r, s$  induzierten Projektivitäten elliptische Involutionsen und umgekehrt.

*Harald Geppert* (Berlin).



**Calvo, D.: Sur les réciprociétés de l'espace dont les homographies associées n'ont que deux droites unies.** Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 10, 67—72 (1941).

Ist  $\theta$  eine reelle Reziprozität des  $S_3$ , so ist  $\theta^2 = \Omega$  eine Projektivität; Verf. untersucht diejenigen  $\theta$ , deren zugehöriges  $\Omega$  lediglich zwei reelle Fixgeraden  $r, s$  besitzt. Den Punkten von  $r$  kann dann  $\theta$  das Ebenenbüschel um  $r$  oder um  $s$  zuordnen. Setzt man  $r: x_3 = x_4 = 0$  und  $s: x_1 = x_2 = 0$ , so lautet die Gleichung von  $\theta$  im ersten Falle  $a_{13}(x_3x'_1 + \varepsilon x_4x'_2) + a_{23}(x_3x'_2 - \varepsilon x_4x'_1) + a_{31}(x_1x'_3 + \varepsilon x_2x'_4) + a_{32}(x_2x'_3 - \varepsilon x_1x'_4) = 0$  mit den Bedingungen  $a_{13}a_{32} - a_{23}a_{31} \neq 0$ ,  $a_{31}^2 + a_{32}^2 \neq a_{13}^2 + a_{23}^2$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ . Hingegen nimmt sie im zweiten Falle die Form an

$\lambda\{\beta(x_1x'_1 + x_2x'_2) + (\alpha - 1)(x_2x'_1 - x_1x'_2)\} + \lambda'\{\beta'(x_3x'_3 + x_4x'_4) + (\alpha' - 1)(x_4x'_3 - x_3x'_4)\} = 0$  mit den Bedingungen  $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 = 1$ ,  $\beta \neq \beta' \neq 0$ . *Harald Geppert.*

**Calvo, D.: Sur les réciprociétés réelles de l'espace dont les homographies associées sont dépourvues de points réels unis.** Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 10, 301—306 (1941).

In Fortsetzung der vorangehenden Note untersucht Verf. die reellen Reziprozitäten  $\theta$  des  $S_3$ , für die die Projektivität  $\Omega = \theta^2$  keine reellen Fixpunkte hat, und zwar zunächst biaxial elliptisch ist. Sie können auf die Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} &\lambda_1\{\beta(x_1x'_1 + x_2x'_2) - (\alpha - 1)(x_2x'_1 - x_1x'_2)\} + \lambda_2\{\beta(x_3x'_3 + x_4x'_4) - (\alpha - 1)(x_4x'_3 - x_3x'_4)\} \\ &+ \lambda_3\{(x_4x'_1 - x_3x'_2) + \beta(x_1x'_3 + x_2x'_4) - \alpha(x_2x'_3 - x_1x'_4)\} \\ &+ \lambda_4\{\alpha(x_4x'_1 - x_3x'_2) - \beta(x_3x'_1 + x_4x'_2) - (x_2x'_3 - x_1x'_4)\} = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1. \end{aligned}$$

Zu gegebenem  $\Omega$  gibt es also  $\infty^3 \theta$ . — Hat  $\Omega$  hingegen lediglich eine reelle Festgerade  $g$  (und auf ihr zwei konjugiert-imaginäre Fixpunkte), so gibt es auch wieder  $\infty^3 \theta$  zu gegebenem  $\Omega$ . Man kann sie so schreiben:

$$\begin{aligned} &\lambda_1\{(x_3x'_1 \mp x_4x'_2) + \alpha(x_1x'_3 \mp x_2x'_4) \mp \beta(x_1x'_4 \pm x_2x'_3)\} \\ &+ \lambda_2\{(\pm x_3x'_2 + x_4x'_1) + \alpha(x_1x'_4 \pm x_2x'_3) \pm \beta(x_1x'_3 \mp x_2x'_4)\} \\ &+ \lambda_3(x_3x'_3 \mp x_4x'_4) + \lambda_4(\pm x_3x'_4 + x_4x'_3) = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1. \end{aligned}$$

*Harald Geppert (Berlin)*

**Calvo, Dolorès: Sur la variété de Segre représentant les points de deux plans.** Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 28, 179—192 (1942).

Bekanntlich ist beim Studium der Veroneseschen Fläche  $V_2^4$ , die auf die Ebene durch das System der Kegelschnitte abgebildet wird, der Begriff der konjugierten Kegelschnitte von großem Nutzen; hat man nämlich ein projektives Entsprechen zwischen den Punktgebilden 2. Ordnung einer Ebene  $\pi$  und den Hyperebenen eines  $S_5$  festgelegt, so entsteht mittels dieses Begriffes auch eine projektive Beziehung zwischen den Punkten des  $S_5$  und den Hüllgebilden 2. Grades von  $\pi$ . Verf. zeigt nun, wie durch Einführung eines ähnlichen Begriffes sich in ganz analoger Weise wie bei der  $V_2^4$  die Behandlung der Segre-Mannigfaltigkeit durchführen läßt, die die Bildmannigfaltigkeit der Punktepaare zweier Ebenen in einem  $S_8$  ist. Zwischen den Ebenen ( $y$ ) und ( $z$ ) betrachtet man zwei Korrelationen; die Gleichung der ersten lautet

$$(1) \quad \sum \alpha_{ik} y_i z_k = 0,$$

während die zweite in Linienkoordinaten ( $\eta$ ) und ( $\zeta$ ) die Darstellung

$$(2) \quad \sum a_{ik} \eta_i \zeta_k = 0$$

hat. (1) nennen wir eine Punkt-Reziprozität, (2) eine Tangenten-Reziprozität, da sie eine Relation zwischen den Geraden der beiden Ebenen darstellt. Verf. nennt eine Punkt- und eine Tangentenkorrelation konjugiert, wenn zwischen ihren Gleichungen (1) und (2) die Beziehung

$$(3) \quad \sum a_{ik} \alpha_{ik} = 0$$

besteht. Ein lineares  $\infty^7$ -System von Punkt-(Tangenten-)Reziprozitäten bestimmt eine einzige zu ihnen allen konjugierte Tangenten-(Punkt-)Reziprozität und umgekehrt. Insbesondere wird dem System der  $\infty^7$  Punkt-(Tangenten-)Reziprozitäten,



bei denen zwei vorgegebene Punkte (Geraden) einander entsprechen, eine singuläre Tangenten-(Punkt-)Reziprozität zweiter Art zugeordnet. Stellt man nun zwischen dem Linearsystem der  $\infty^8$  Korrelationen (1) und dem der Hyperebenen eines  $S_8$  eine projektive Abbildung her, so erhält man gleichzeitig eine Projektivität zwischen den Punkten des  $S_8$  und den Reziprozitäten (2). Dabei bilden sich eine Hyperebene und ein Punkt des  $S_8$ , die einander enthalten, auf eine Punkt- bzw. Tangenten-Reziprozität ab, die zueinander konjugiert sind. Der Ort der Punkte des  $S_8$ , die den singulären Tangentenreziprozitäten 2. Art entsprechen, ist die  $V_4^6$ , die die Punktepaare ( $y$ ) und ( $z$ ) abbildet [vgl. C. Segre, Rend. Circ. mat. Palermo 5, 192—204 (1891)], während die bekannte  $V_7^3$  (die Mannigfaltigkeit  $I'$  der klassischen Arbeit von Segre), die doppelt durch die  $V_4^6$  geht und der alle die  $V_4^6$  berührenden  $S_4$  angehören, als Bild der singulären Tangentenreziprozitäten 1. Art erhalten wird. Durch Überlegungen dieser Art gelangt Verf. auf einfachem und elegantem Wege dazu, die verschiedenen Eigenschaften der  $V_4^6$  und der  $V_7^3$  zu entwickeln. Schon in der zitierten Arbeit von Segre wird auf die Korrelationen (1) und (2) zurückgegriffen, es fehlt dort aber die Benutzung von (3), obgleich Segre selbst, auf den die Anwendung der konjugierten Paare von Punkt- und Hüllgebilden 2. Ordnung (er nennt sie harmonisch) zurückgeht, bei der Untersuchung der Veronesischen Fläche  $V_2^4$  die Analogie hervorhebt, die die Darstellung der Reziprozitäten zwischen zwei Ebenen und die der Kegelschnitte einer Ebene verbindet [vgl. C. Segre, Atti Accad. Sci. Torino 20, 487—504 (1885)].

Campedelli (Firenze).

**Rozet, O.:** Note de géométrie projective. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 10, 460—462 (1941).

L'auteur considère, dans un espace à 3 dimensions, une homographie réelle  $\Omega$  ne possédant qu'un nombre fini d'éléments unis, dont deux droites réelles gauches  $r_1, r_2$ ; sur  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $\Omega$  détermine une projectivité  $w_i$  dont on détermine l'invariant par les points doubles  $M_i, N_i$  et un couple homologue  $A_i, A'_i$ ; c'est le birapport  $k_i = (M_i N_i A_i A'_i)$  ou  $h_i = k_i^{-1} = (N_i M_i A_i A'_i)$ . On suppose  $w_1, w_2$  simultanément hyperboliques ou elliptiques. Les droites  $r_1, r_2, M_1 M_2, N_1 N_2, M_1 N_2, M_2 N_1$  sont unies pour  $\Omega$ , donc aussi le faisceau  $|Q_1|$  des quadriques  $Q_1$  contenant  $r_1, r_2, M_1 M_2, N_1 N_2$  ou le faisceau  $|Q_2|$  relatif à  $r_1, r_2, M_1 N_2, M_2 N_1$ . La condition nécessaire et suffisante pour que chaque quadrique  $Q_1$  soit unie est  $k_1 = k_2$ :  $w_1$  et  $w_2$  sont projectivement identiques; la condition analogue pour toute quadrique  $Q_2$  donne  $k_1 = h_2$ :  $w_1$  et  $w_2^{-1}$  sont proj. identiques. Si  $w_1, w_2$  sont toutes deux involutives, chaque quadrique  $Q_1$  ou  $Q_2$  est unie. Le point  $P$  ayant pour homologue  $P'$ ,  $k_1 = k_2$  est encore la condition nécessaire et suffisante de rencontre (en un point  $P_2$ ) des droites suivantes: la première issue de  $P$ , rencontrant  $r_1$  et  $r_2$ , la seconde issue de  $P'$  et rencontrant  $M_1 M_2, N_1 N_2$  ou encore (en un point  $P_1$ ) des droites, l'une issue de  $P$ , s'appuyant sur  $M_1 M_2, N_1 N_2$ , l'autre issue de  $P'$  et s'appuyant sur  $r_1, r_2$ ; il existe alors une homographie biaxiale hyperbolique  $\Omega_1$  d'axes  $r_1, r_2$  faisant correspondre  $P_2$  à  $P$ ; de même une homographie biaxiale, hyperbolique ou elliptique,  $\Omega_2$  d'axes  $M_1 M_2, N_1 N_2$  et faisant correspondre  $P'$  à  $P_2$ ; on a  $\Omega = \Omega_1 \Omega_2 = \Omega_2 \Omega_1$ ;  $\Omega_2$  est hyperbolique ou elliptique en même temps que  $w_1, w_2$ ; elle est involutive, si  $w_1, w_2$  le sont;  $\Omega_1$  n'est jamais involutive. L'auteur étudie rapidement ensuite le cas où  $r_1, r_2$  coïncident en une même droite  $r$  en introduisant une homographie  $\Omega_l$  de  $S_3$  ne possédant que deux points unis  $M, N$ , simultanément réels ou imaginaires, situés sur  $r$ ;  $\Omega_l$  a alors deux plans unis  $\mu, \nu$  réels si  $M, N$  sont réels, imaginaires si  $M, N$  le sont;  $\Omega_l$  possède deux droites unies  $r_\mu$  du faisceau  $(M, \mu)$ ,  $r_\nu$  du faisceau  $(N, \nu)$ ; le faisceau  $|Q|$  des quadriques passant par  $r_\mu, r_\nu$ , se raccordant le long de  $r$ , est uni pour  $\Omega$  et chaque quadrique du faisceau est unie pour  $\Omega_l$ . L'auteur retrouve ensuite un résultat établi analytiquement par M<sup>lle</sup> Legrand.

B. Gambier (Paris).